Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Ленинградский ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
электротехнический институт имени В.И.Ульянова (Ленина)

Ю.А.Борцов, Н.Д.Поляхов, В.В.Путов

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСОВ

Ленинград
1989

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

Ленинградский ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции
электротехнический институт имени В.И.Ульянова (Ленина)

Ю.А.Борцов, Н.Д.Поляхов, В.В.Путов

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ УПРАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСОВ

Учебное пособие

Ленинград
1989

УДК 62-83-523:681.513.6

Авторы: Ю.А.Борцов, Н.Д.Поляхов, В.В.Путов.
Электромеханические системы управляющих комплексов: Учеб. пособие/ ЛЭТИ.- Л., 1989.- 79 с.

Систематизированы методы построения математических моделей сложных электромеханических систем со многими степенями подвижности в форме векторно-матричных уравнений Лагранжа-Максвелла. Сообщаются элементы теории устойчивости механических систем. Рассматриваются механические характеристики электрических машин различных типов как класса электромеханических преобразователей.

Предназначено студентам специальности 2107 "Автоматика и управление в технических системах" и инженерно-техническим работникам смежных областей.

Ил. 26, табл. 2, библиогр. - 12 назв.

Рецензенты: кафедра робототехники и автоматизированных систем управления СЗПИ; д-р техн. наук проф. А.М.Потапов.

УТВЕРЖДЕНО
редакционно-издательским советом института
в качестве учебного пособия

© Ленинградский ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции электротехнический институт им.В.И.Ульянова (Ленина),1989

I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В этом разделе излагается материал по выводу и составлению уравнений Лагранжа для механических систем, в том числе и для упругих механических систем. Изложение сопровождается примерами.

I.I. Основные понятия. Обобщенные координаты и обобщенные силы

Электромеханической системой (ЭМС) называется совокупность взаимосвязанных звеньев механических конструкций и электромагнитных цепей, образующих динамическую систему, протекание процессов в которой характеризуется взаимным превращением механической и электромагнитной энергий.

Совокупность связанных звеньев механической конструкции составляет механическую систему (МС).

Электромеханической связью называется функциональная связь запасенной энергии электромагнитного поля в электромагнитных цепях ЭМС с мгновенной конфигурацией МС, причем электромагнитная энергия является гладкой функцией вектора переменных состояния МС (обобщенных механических координат). Электромеханическая связь определяется обобщенными силами электромеханической связи, возникающими при изменении запасенной электромагнитной энергии и являющимися непрерывными функциями обобщенных механических координат и вектора переменных состояния электромагнитных цепей.

Управляемой ЭМС называется такая система управления, в которой объект управления представляет собой ЭМС, а регулятор является функцией механических и электромагнитных переменных состояний. Управляемую ЭМС можно представить следующей структурой, показанной на рис. I.I, где обозначены: u, u^0 – векторы управления и программного воздействия, а x_e, x_M – векторы переменных состояния электромагнитных цепей и механической системы, соответственно.

В ЭМС любое изменение механической конфигурации приводит к появлению сил электромеханической связи и наоборот, возбуждающие силы электромеханической связи приводят к изменению конфигурации МС.

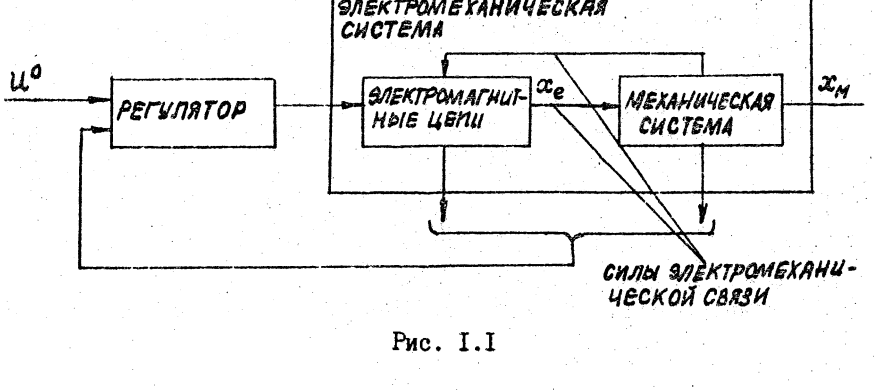

Рис. I.I

Одним из основных понятий механики является понятие материальной точки, под которой понимают тело, размерами которого можно пренебречь. Будем исходить из конечномерного представления МС или совокупности материальных связанных точек m_ν, $\nu = 1, \ldots, N$ где N - число материальных точек, составляющих МС. Рассмотрим инерциальную систему $OXYZ$ в которой положение ν -й массы определяется трехмерным вектором $r_\nu = [x_\nu, y_\nu, z_\nu]^T$ компоненты которого совпадают с ее декартовыми координатами x_ν, y_ν, z_ν, T - знак транспонирования. Движение m_ν характеризуется также скоростью $\dot{r}_\nu = dr_\nu/dt$ и ускорением $\ddot{r}_\nu = d^2 r/dt^2$, где точка над вектором обозначает покомпонентное дифференцирование по времени. Таким образом, движение МС можно охарактеризовать $3N$ -мерными векторами, составленными из координат положений, скоростей и ускорений совокупности N точек вида [1,3]

$$r = [r_1^T, \ldots, r_N^T]^T; \quad \dot{r} = [\dot{r}_1^T, \ldots, \dot{r}_N^T]^T; \quad \ddot{r} = [\ddot{r}_1^T, \ldots, \ddot{r}_N^T]^T.$$

Механическая система называется несвободной, если на ее координаты и(или) скорости накладываются ограничения, называемые связями. Связи описываются либо равенствами, либо неравенствами

$$f(r, \dot{r}, t) = 0, \quad f(r, \dot{r}, t) \geqslant 0 \quad . \qquad (I.I)$$

В первом случае имеем удерживающие связи, а во втором – неудерживающие связи, где функция $f(\cdot)$ – p -мерная $(p < 3N)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция по своим аргументам. Далее ограничимся рассмотрением только удерживающих связей.

Связь, а вслед за ней и механическая система, называется голономной, если увеличение связи не зависит от скоростей либо если зависящее от скоростей управление связи допускает интегрирование, которое сводит его к уравнению, не зависящему от вектора скорости.

Если уравнение связи (I.I) не зависит от времени, то связь и МС называются стационарными. Введем обозначения для сокращения записи операции дифференцирования векторной функции по векторному аргументу:

$$r = [x_1\, y_1\, z_1, \ldots, x_N\, y_N\, z_N]^T = [r_1\, r_2\, r_3, \ldots, r_h]^T,\ h = 3N,$$

$$\frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial r_1} & \frac{\partial f_1}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial r_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial r_1} & \frac{\partial f_p}{\partial r_2} & \cdots & \frac{\partial f_p}{\partial r_h} \end{bmatrix}$$

$\frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T}$ – $p \times h$ -мерная функциональная матрица Якоби. Отметим, что $\left[\frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T}\right]^T = \frac{\partial f^T(r,t)}{\partial r}$ – $n \times p$ -мерная матрица и $det\left[\frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T}\right] \neq 0$ означает, что $p = 3N$ и $f(r,t)$ полного ранга в области изменения r, t.

Кроме того, для k-й скалярной компоненты $f_k(r,t)$ функции $f(r,t)$ можно записать симметричную $h \times h$-мерную матрицу, составленную из частных производных второго порядка вида $\frac{\partial^2 f_k}{\partial r \partial r^T} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial r^T \partial r}$ и известную под названием гессовой матрицы скалярной функции векторного аргумента или матрицы Гесса, а определитель ее называется гессианом.

Указанные обозначения облегчают запись производных по времени векторной функции $f(r,t)$ векторного аргумента r в виде

$$\frac{df(r,t)}{dt} = \frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T} \dot{r} + \frac{\partial f(r,t)}{\partial t},$$

$$\frac{d^2 f(r,t)}{dt^2} = \frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T}\ddot{r} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(r,t)}{\partial r}\dot{r}\right) + \frac{d}{dt}\frac{\partial f(r,t)}{\partial t}.$$

Виртуальным перемещением МС называется такое линейное перемещение δr всех ее точек m_ν из фиксированного положения r_0 и при фиксированных во времени нестационарных связях. Из предыдущего следует, что на виртуальном перемещении при $f(r,t) = 0$ $\frac{\partial f(r,t)}{\partial r^T}\delta r = 0$. Здесь линейное перемещение подразумевается происходящим не под действием реальных сил в отличие от действительного перемещения dr происходящего под действием реальных сил. В частном случае стационарной МС $f(r) = 0$ любое действительное перемещение является виртуальным, т.е. $\frac{\partial f(r)}{\partial r^T} dr = 0$ и $dr = \delta r$. В нестационарном случае, наоборот, никакое виртуальное перемещение не может быть действительным.

Связи называются идеальными, если работа сил реакций связей на любом виртуальном перемещении равна нулю, т.е.

$$F_f^T \delta r = \delta r^T F_f = 0,$$

где

$F_f = [F_{f1}^T, \dots, F_{f\nu}^T, \dots, F_{fN}^T]^T$ – вектор равнодействующих сил реакций связей.

Геометрически это означает, что вектор реакций связей нормален к поверхности связей. Можно назвать следующие виды связей: абсолютно жесткая, шарнир без трения, качение и скольжение по поверхности, причем последняя связь относится к неголономным. В дальнейшем ограничимся рассмотрением голономных систем с удерживающими идеальными связями $f(r,t) = 0$, $\delta r^T F_f = 0$ в каждой точке которой приложены активные силы

$$F^a = [F_1^{aT}, F_2^{aT}, \dots, F_\nu^{aT}, \dots, F_N^{aT}]^T \in R^{3N}.$$

Уравнение движения голономной нестационарной МС с удерживающими связями запишем в форме второго закона Ньютона

$$m_\nu \ddot{r}_\nu = F_\nu^a + F_{fN}, \quad \nu \in \overline{1,N} \qquad (I.2)$$

или

$$M\ddot{r} = F^a + F_f,$$

где

$$M = diag[m_1 m_1 m_1, \dots, m_\nu m_\nu m_\nu, \dots, m_N m_N m_N]$$

Умножая (I.2) слева на δr^T и учитывая идеальность связей, получаем основное уравнение динамики Лагранжа порядка $3N$

$$\delta r^T(F^a - M\ddot{r}) = 0 . \qquad (I.3)$$

Пусть $rank \frac{\partial f}{\partial r^T} = p$, т.е. p уравнений связей линейно независимы. Исключая p независимых уравнений связи из системы уравнений (I.3), составляют уравнение движения МС в независимых обобщенных координатах размерности $n_M = 3N-p$. Число n_M называется числом степеней свободы МС, а n_M - мерный вектор независимых координат q называется вектором обобщенных (лагранжевых) координат, $\dot{q}$ - вектор обобщенных скоростей. В качестве компонент q можно принять либо n_M независимых декартовых координат, либо вектор q можно составить из линейных комбинаций этих координат, а также из любых независимых переменных, характеризующих конфигурацию МС.

Для определения обобщенных координат применяются следующие правила.

I. Зафиксировать все возможные перемещения всех точек МС. Эти перемещения можно принять за обобщенные координаты; их число и является числом степеней свободы n_M .

2. Рассмотреть геометрию системы и написать уравнение

$$r(q,t) = 0 \qquad (I.4)$$

которое разрешимо относительно q в области

$$q \in \Xi \subset R^{n_M}, \; t \in I_t = [t_0, \infty), \; t_0 \in R^1 \qquad (I.5)$$

для любых r, совместимых по связям, т.е. $rank \frac{\partial r}{\partial q^T} = n_M$ в этой области , $r(q,t)$ дважды дифференцируема.

Дифференцируя по времени сложную векторную функцию (I.4), получим по предыдущим формулам

$$\dot{r}(q,t) = \frac{\partial r(q,t)}{\partial q^T}\dot{q} + \frac{\partial r(q,t)}{\partial t} . \qquad (I.6)$$

Обобщенная сила определяется из вектора активных сил как равнодействующая компонента вектора активных сил вдоль обобщенных координат

$$Q^a(q,\dot{q},t) = \frac{\partial r^T}{\partial q} F^a, \quad r = r(q,t) \qquad (I.7)$$

и находится из рассмотрения элементарной работы активных сил F^a на виртуальных перемещениях

$$\delta A = \delta r^T F_a = \delta q^T \frac{\partial r^T(q,t)}{\partial q} F^a = \delta q^T Q^a.$$

Обобщенные силы, как и активные силы, в общем случае также зависят от обобщенных координат и обобщенных скоростей, т.е. $Q^a = Q^a(q, \dot{q}, t)$. Обобщенные силы $Q^a = [Q^a_1, Q^a_2, \dots Q^a_n]^T$ рассчитываются либо покомпонентно, когда i -я координата получает приращение (при "замороженных" связях), т.е.

$$Q^a_i = \frac{\partial r^T}{\partial q_i} F^a = \sum_{\nu=1}^{N} \left(F^a_{\nu x} \frac{\partial r_{\nu x}}{\partial q_i} + F^a_{\nu y} \frac{\partial r_{\nu y}}{\partial q_i} + F^a_{\nu z} \frac{\partial r_{\nu z}}{\partial q_i} \right), \quad (I.8)$$

либо при варьировании δq_i, δq_j, $i \neq j$ и вычислении виртуальной работы по (I.8)

$$\delta A_i = Q^a_i \delta q_i; \quad (r_{\nu x} = x_\nu, r_{\nu y} = y_\nu, r_{\nu z} = z_\nu). \quad (I.9)$$

Если обобщенная сила не зависит от обобщенных скоростей $Q^\Pi = Q^\Pi(q,t)$ и существует скалярная функция $\Pi(q,t)$, непрерывно дифференцируемая и такая, что

$$Q^\Pi(q,t) = -\frac{\partial \Pi(q,t)}{\partial q} = -\operatorname{grad} \Pi(q,t); \quad \frac{\partial Q^\Pi}{\partial q^T} = \frac{\partial Q^{\Pi T}}{\partial q}, \quad (I.10)$$

то $Q^\Pi(q,t)$ называется вектором потенциальных сил, а функция $\Pi(q,t)$ - потенциальной энергией.

Механическая система, в которой действуют только потенциальные силы, называется консервативной. Имеют место соотношения

$$\Pi(q,t) = \Pi(r(q,t),t); \quad Q^\Pi(q,t) = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{\partial r^T}{\partial q} \frac{\partial \Pi}{\partial r},$$

где $\frac{\partial r^T}{\partial q} \in R^{n_M \times 3N}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial r} \in R^{3N \times 1}$

В частном случае (I.10) имеет вид

$$Q^\Pi(q,t) = -C(q,t)\, q, \quad (I.11)$$

где $C(q,t)$ - $n_M \times n_M$ -мерная функциональная симметричная матрица в области (I.5).

Если $C(q,t) = C$ - постоянная матрица, то $\Pi(q) = 0{,}5\, q^T C q$ - квадратичная форма относительно компонент вектора обобщенных координат q.

Если в области (I.5) обобщенная сила $Q^R(q,\dot{q},t)$ удовлетворяет условию

$$\dot{q}^T Q^R \le 0, \tag{I.12}$$

то такая сила называется диссипативной. Рассеяние энергии в МС в случае неидеальных связей учитывается введением диссипативных сил. Если неравенство (I.12) строгое всюду в (I.5), то говорят, что МС в этом случае обладает полной диссипацией. Диссипативная сила, линейная по $\dot{q}$ называется силой вязкого трения

$$Q^R_{\text{вяз}}(q,\dot{q},t) = -R(q,t)\,\dot{q}. \tag{I.13}$$

Диссипативным силам сопоставляется диссипативная функция $\mathcal{R}(q,\dot{q},t)$ непрерывно дифференцируемая по своим аргументам

$$Q^R(q,\dot{q},t) = \frac{\partial \mathcal{R}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}.$$

Для сил вязкого трения $\mathcal{R}(q,\dot{q},t)$ имеет вид квадратичной формы относительно $\dot{q}$

$$\mathcal{R}(q,\dot{q},t) = 0{,}5\, \dot{q}^T R(q,t)\,\dot{q},$$

где $R(q,t)$ - симметричная функциональная матрица.
Когда $R(q,t) = R$ - постоянная матрица

$$Q^R_{\text{вяз}}(\dot{q}) = -R\dot{q}.$$

Линейная по $\dot{q}$ сила $Q^G(q,\dot{q},t)$, мощность которой в области (I.5) равна тождественно нулю, называется гироскопической. Этим силам сопоставляется функция

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(q,\dot{q},t) &= 0{,}5\, \dot{q}^T G(q,t)\,\dot{q} = 0 \quad ; \\ Q^G(q,\dot{q},t) &= -\frac{\partial \mathcal{G}(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}} = -G(q,t)\dot{q}, \end{aligned} \tag{I.14}$$

где $G(q,t)$ - кососимметричная функциональная матрица .

рассматривают также псевдогироскопические (неконсервативные) силы $Q^P(q,t)$ такие, что $q^T Q^P(q,t) = q^T P(q,t) q \equiv 0$ и соответствующую функцию $\mathcal{P}(q,t) = 0{,}5\, q^T P(q,t) q$, где $P(q,t) = P^T(q,t)$ - кососимметричная функциональная матрица псевдогироскопических сил.

Управляющие силы $Q^u(q,\dot{q},t)$ формируются с помощью регуляторов, воздействующих через исполнительные органы на материальные точки МС. Представим их в виде

$$Q^u(q,\dot{q},t) = U(q,t)\, u(q,\dot{q},t), \qquad (I.15)$$

где $u(\cdot)$ - m -вектор управления; U - $n_M \times m$ -функциональная матрица.

Таким образом $Q^a(q,\dot{q},t) = Q^{\Pi}(q,t) + Q^{НП}(q,\dot{q},t)$, где $Q^{НП}(q,\dot{q},t) = Q^R(q,\dot{q},t) + Q^G(q,\dot{q},t) + Q^P(q,\dot{q},t) + Q^u(q,\dot{q},t)$.

I.2. Уравнение Лагранжа второго рода

Скалярная функция $T = 0{,}5\, \dot{r}^T M \dot{r}$ называется кинетической энергией МС. Подставляя сюда выражение (I.6), получаем

$$T(q,\dot{q},t) = T_2 + T_1 + T_0, \qquad (I.16)$$

где $T_2 = 0{,}5\, \dot{q}^T A(q,t)\, \dot{q}$; $T_1 = \dot{q}^T b(q,t)$; $T_0 = C(q,t)$;

$$A(q,t) = \frac{\partial r^T}{\partial q} M \frac{\partial r}{\partial q^T} = \frac{\partial^2 T(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}\, \partial \dot{q}^T}; \quad b(q,t) = \frac{\partial r^T}{\partial q} M \frac{\partial \dot{r}}{\partial \dot{q}};$$

$$C(q,t) = \frac{\partial r^T}{\partial t} M \frac{\partial r}{\partial t}.$$

На основе выражений (I.3), (I.7) и того, что $\delta q \neq 0$ запишем

$$\frac{\partial r^T}{\partial q} M \ddot{r} = Q^a \qquad (I.17)$$

причем левая часть здесь равна

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial r}{\partial q} M \dot{r}\right] - \frac{d}{dt}\frac{\partial r^T}{\partial q} M \dot{r}.$$

Дифференцируя равенство (I.6) по $\dot{q}$ имеем $\frac{\partial \dot{r}^T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial r^T}{\partial q}$.

Дифференцируя (I.6) по q получаем $\frac{\partial \dot{r}^T}{\partial q} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial r^T}{\partial q}\right)$.

Результаты дифференцирования подставляем в левую часть (I.I7) и получаем $2n_м$ -мерное векторное дифференциальное уравнение Лагранжа второго рода для голономной МС

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^{a}. \qquad (I.I8)$$

Скалярная функция вида

$$L(q,\dot{q},t) = \bar{T}(q,\dot{q},t) - \Pi(q,t) \qquad (I.I9)$$

называется функцией Лагранжа или кинетическим потенциалом. Введем линейный оператор Эйлера векторного дифференцирования

$$\mathcal{E}\{\cdot\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\{\cdot\}\right) - \frac{\partial}{\partial q}\{\cdot\}. \qquad (I.20)$$

Вычислим

$$\mathcal{E}\{\Pi\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = Q^{\Pi}.$$

Тогда по (I.I9)

$$\mathcal{E}\{L\} = \mathcal{E}\{\bar{T} - \Pi\} = Q^{нп}. \qquad (I.2I)$$

Выполняя почленно операции дифференцирования в (I.2I)

$$\mathcal{E}\{T\} = \mathcal{E}\{T_2\} + \mathcal{E}\{T_1\} + \mathcal{E}\{T_0\},$$

получим дифференциальные уравнения голономной МС относительно $\ddot{q}$ в явной форме

$$\mathcal{E}\{T_2\} = \frac{d}{dt}(A(q,t)\,\dot{q}) - \frac{\partial}{\partial q}(0{,}5\,\dot{q}\,A(q,t)\,\dot{q}) =$$
$$= A(q,t)\,\ddot{q} + \left[\frac{d}{dt}A(q,t)\right]\dot{q} - \frac{\partial}{\partial q}(T_2).$$

Здесь $\left[\frac{d}{dt}A(q,t)\right]\dot{q} = \left[\dot{q}^{T}\frac{\partial A_1^{T}}{\partial q}\dot{q}, \ldots, \dot{q}^{T}\frac{\partial A_{n_м}}{\partial q}\dot{q}\right]^{T} + \frac{\partial A(q,t)}{\partial t}\dot{q}$

где $A_1, \ldots, A_{n_м}$ - столбцы матрицы $A(q,t)$;

$$\frac{\partial T_2}{\partial q} = 0{,}5\left[\dot{q}^{T}\frac{\partial A}{\partial q_1}\dot{q}, \ldots, \dot{q}^{T}\frac{\partial A}{\partial q_{n_м}}\dot{q}\right]^{T},$$

$$\mathcal{E}\{T_1\} = \frac{d}{dt}[b(q,t)] - \frac{\partial}{\partial q}b^{T}(q,t)\,\dot{q} =$$

$$= G^t(q,t)\,\dot{q} + \frac{\partial B(q,t)}{\partial t},$$

где

$$G^t(q,t) = \frac{\partial B(q,t)}{\partial q^T} - \frac{\partial B^T(q,t)}{\partial q}$$ - кососимметричная матрица (см. (I.I4)).

$$\Sigma\{T_0\} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial C(q,t)}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial C(q,t)}{\partial q} = -\frac{\partial C(q,t)}{\partial q};$$

Таким образом, уравнение (I.2I) приобретает вид

$$A(q,t)\ddot{q} + a(q,\dot{q},t) = -\frac{\partial A(q,t)}{\partial t}\dot{q} - C^t(q,t)\dot{q} -$$

$$- \frac{\partial B(q,t)}{\partial t} + \frac{\partial C(q,t)}{\partial q} - Q^T(q,t) + Q^{HП}(q,\dot{q},t), \quad (I.22)$$

где вектор-столбец $a(q,\dot{q},t)$ составлен из удвоенных квадратичных форм относительно обобщенных скоростей

$$a(q,\dot{q},t) = \dot{q}^T\left[\frac{\partial A_i^T(q,t)}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial A(q,t)}{\partial q_i}\right]\dot{q}, \; i = 1,\dots n_M.$$

В стационарном случае уравнение (I.22) с (I.I5) имеет вид

$$A(q)\ddot{q} + a(q,\dot{q}) = -C(q)q - R(q)\dot{q} - G(q)\dot{q} + P(q)q + U(q,\dot{q})u. \quad (I.23)$$

Для линейной стационарной МС (I.22) приобретает вид

$$A\ddot{q} + R^*\dot{q} + C^*q = Uu(t),$$

где A, R^*, C^* - постоянные матрицы. Так как $A > 0$ и существует A^{-1} в области (I.5), то последнее уравнение можно привести к виду, разрешенному относительно старшей производной. При введении вектора $[q^T, \dot{q}^T]^T$, получаем уравнение в нормальной форме

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_M \times n_M} \\ -A^{-1}C^* & -A^{-1}R^* \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q \\ \dot{q} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ A^{-1}U \end{bmatrix} u(q,\dot{q},t).$$

Уравнения (I.22) и (I.23) можно записать

$$\dot{x} = \varphi(x,t) + B(x,t)\,u\,,\quad x^T = [q^T, \dot{q}^T]\,; \qquad (I.24)$$
$$\dot{x} = F(x,t)x + B(x,t)\,u\,,$$

причем последнее уравнение дано в линейной относительно $x(t)$ и $u(t)$ записи, а $F(x,t)$, $B(x,t)$ – матрицы-функции, непрерывно дифференцируемые по всем аргументам и ограниченные вместе со своими производными в области определения (I.5).

Состояние равновесия стационарной МС. Для голономной стационарной МС состояние равновесия $q^* = const$ определяется из условия $\ddot{q}_i(t) \equiv \dot{q}_i(t) \equiv 0$ и является решением уравнения

$$-\frac{\partial T_1(q)}{\partial q_i} + Q_i^{нп}(q) = 0\,. \qquad (I.25)$$

Сводка рекомендаций по составлению уравнений Лагранжа.

I. Составить расчетную схему МС, изображающую положение масс, вид и параметры удерживающих связей, ввести обозначения активных сил, определив их точки приложения и направления.

2. Ввести неподвижную (инерциальную) систему координат. Построить радиусы-векторы масс и составить уравнение связей $f(r,t) = 0$, или $f(r) = 0$.

3. Определить число степеней свободы МС одним из двух указанных выше способов и ввести обобщенные координаты q_i. Составить уравнения $r(q,t) = 0$ или $r(q) = 0$.

4. Вычислить кинетическую энергию $T = 0{,}5\,\dot{r}^T M \dot{r}$ и записать выражения для $A(q,t)$, $b(q,t)$ и $C(q,t)$ по формулам (I.I6).

5. Из рассмотрения запасенной энергии МС вычислить потенциальную энергию. В частности:

а) запасенная энергия поля силы тяжести материальных точек равна работе, совершаемой по перемещению материальных точек вдоль силовых линий поля, параллельных вертикальной оси, т.е. $\Pi_\nu = m_\nu g\,\Delta z(q) \cdot \nu = \overline{1,N}$, где g – ускорение свободного падения; $\Delta z(q)$ – приращение перемещения вдоль вертикальной оси z; $\Pi = \sum_{\nu=1}^{N} \Pi_\nu$, откуда $Q_{i\nu}^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi_\nu}{\partial q_i}$ или $Q_i^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}$;

б) запасенная энергия упругих связей для идеальной пружины с линейной восстанавливающей силой (Гука) $F_y = -C(r - r_0)$,

где C – жесткость пружины; r_0, r – радиусы-векторы точечной массы соответственно при недеформированной и деформированной пружине, равна $T_y = c\int_{r_0}^{r}(r-r_0)\,dr = 0{,}5\,C\,(r-r_0)^2$, откуда $Q_y^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_y} = F_y$ (I.11). В качестве обобщенных координат упругой МС бывает удобно выбрать упругие деформации $q_{yi} = r_i - r_{oi}$, отсчитываемые от положений точечных масс соответствующих недеформированному состоянию пружин.

6. Определить непотенциальные обобщенные силы по соотношению $Q_j^a = \frac{\partial r^T}{\partial q_j} F_a$ (I.9), (I.10).

7. Составить уравнение Лагранжа в явной форме (I.22) или (I.23) с дальнейшим переходом к нормальному виду уравнений (I.24).

8. Учесть потери трения введением диссипативных сил $Q_j^R(q, \dot{q}, t)$.

9. Привести к форме (I.24) и вычислить режимы по (I.25).

Пример. Эллиптический маятник. Расчетная схема маятника показана на рис. I.2 и представляет собой движущуюся прямолинейно в горизонтальной плоскости массу m_1 и подвешенную к ней на нерастяжимой нити длиной ℓ массу m_2.

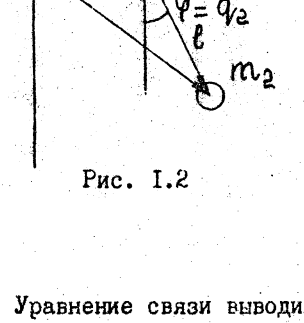

Рис. I.2

Введем неподвижную систему координат x, y, z (z – перпендикулярна чертежу).

Радиусы-векторы центров масс: $r_1 = [x_1\ 0\ 0]^T$; $r_2 = [x_2\ y_2\ 0]^T$.

Уравнение связи выводим для мгновенной произвольной конфигурации по соотношениям, выражающим неизменность длины связи: $|r|^2 = |r_1|^2 + |\ell|^2 - 2|r_1|\ell\cos(\pi/2 + \varphi)$. С учетом подстановки r_1 и r_2 имеем $x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + \ell^2 + 2x_1\ell\sin\varphi$.

При вычислении числа независимых координат $n_M = 3N - p$ будем иметь в виду, что $z = 0$ и следовательно $2N = 4$, $p = \frac{\partial f}{\partial r} = 2$. Тогда число степеней свободы $n_M = 2$. За обобщенные координаты примем $q_1 = x_1$, $q_2 = \varphi$.

Выразим декартовы координаты через q_1, q_2

$$x_2 = x_1 + l \sin q_2 = q_1 + l \sin q_2,$$
$$y_2 = -l \cos q_2.$$

Тогда $r = [x_1, 0, 0, x_2, y_2, 0]^T = [q_1, 0, 0, q_1 + l\sin q_2, -l\cos q_2, 0]^T$.

Вычислим кинетическую энергию, учитывая, что

$\dot r = [\dot q_1, \dot q_1 + l(\cos q_2)\dot q_2, l(\sin q_2)\dot q_2]^T$ и записывая

$T = 0{,}5\, \dot r^T M \dot r = 0{,}5[(m_1+m_2)\dot q_1^2 + m_2 l^2 \dot q_2^2 + l m_2 (\cos q_2)\dot q_1 \dot q_2]$,

где $M = \mathrm{diag}(m_1, m_2, m_3)$.

Потенциальная энергия равна $\Pi = mgh = mgl(1 - \cos q_2)$.

Вектор потенциальных сил:

$$Q^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} = \left[-\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_2}\right]^T = [0,\ m_2 g l \sin q_2]^T.$$

Обобщенных потенциальных сил нет.

Составим уравнение Лагранжа $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q^\Pi$.

Непосредственные вычисления дают

$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_1} = \dot q_1 m_1 + m_2 \dot q_1 + 0{,}5 m_2 l \cos q_2 \dot q_2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot q_2} = 0{,}5[m_2 l(\cos q_2)\dot q_1 + m_2 l^2 \dot q_2],$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_1}\right) = (m_1+m_2)\ddot q_1 - m_2 l(\sin \dot q_2)\ddot q_2 \dot q_2 + 2 m_2 l(\cos \dot q_2)\ddot q_2,$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q_2}\right) = 0{,}5 m_2 l(\cos q_2)\ddot q_1 + m_2 l^2 \ddot q_2 - 0{,}5 m_2 l(\sin q_2)\dot q_2 \ddot q_2,$$
$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = -0{,}5 m_2 l(\sin q_2)\dot q_1 \dot q_2, \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0.$$

Отметим, что потери трения можно учесть введением диссипативных сил $Q_1^R = -b_1 \dot q_1$, $Q_2^R = -b_2 \dot q_2$, $b_1, b_2 = \mathrm{const}\ (>0)$ (вязкое трение). Окончательно уравнение движения эллиптического маятника с затуханием при $b_1, b_2 \neq 0$ в явной форме уравнений Лагранжа имеют вид

$$(m_1+m_2)\ddot q_1 - m_2 l(\sin \dot q_2)\ddot q_2 \dot q_2 + 2 m_2 l(\cos \dot q_2)\ddot q_2 = 0,$$
$$0{,}5[m_2 l(\cos q_2)\ddot q_1 + m_2 l^2 \ddot q_2 + 0{,}5 m_2 l(\sin q_2)\dot q_1 \dot q_2] - 0{,}5 m_2 l(\sin q_2)\dot q_2 \dot q_1 =$$
$$= m_2 g l \sin q_2.$$

1.3. Механические системы с циклическими координатами

Существует большой класс МС, в которых при удачном выборе обобщенных координат некоторые из них не входят явно в выражение кинетической энергии, но последняя, конечно, зависит от их скоростей. Если при этом соответствующие им составляющие потенциальных и непотенциальных обобщенных сил равны нулю, то размерность дифференциальных уравнений МС может быть понижена.

Циклические координаты и уравнения Рауса . Пусть выбраны обобщенные координаты q_i, $i=1,\dots,n_M$; $n_M>2$. Если существует такое разбиение (декомпозиция) вектора $q=[q_p^T, q_c]^T$, $q_p\in R^{n_p}$, $q_c\in R^{n_M-n_p}$, что выполняются условия

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad T=T(q_p,\dot q_p,\dot q_c,t),\ \frac{\partial T}{\partial q_c}=0;\ T_1(q_p,t),\ \frac{\partial T_1}{\partial q_2}=0;\\ &2)\quad Q^{нп}(q_p,\dot q_p,t)=[Q_1,\dots,Q_{n_p},\dots,0,\dots,0]^T=Q^{нп}_p, \end{aligned}\right\}\quad (I.26)$$

то компоненты q_c называются циклическими (игнорируемыми) координатами, а q_p – позиционными (явными) координатами. При таком разбиении кинетическая энергия записывается в виде

$$T=\left(T_2^p+T_2^c+T_2^{pc}\right)+\left(T_1^p+T_1^c\right)+T_0, \qquad (I.27)$$

где слагаемые отвечают декомпозиции матрицы $A(q_p,t)$ на четыре блока, а декомпозиция $b(q_p,t)$ на два подвектора соответствующих размерностей, а именно:

$$A(q_p,t)=\begin{bmatrix} A_{11}(q_p,t) & A_{12}(q_p,t)\\ A_{21}(q_p,t) & A_{22}(q_p,t)\end{bmatrix},\quad b(q_p,t)=\begin{bmatrix} b_1(q_p,t)\\ b_2(q_p,t)\end{bmatrix}, \qquad (I.28)$$

$$T_c^p=0{,}5\,\dot q_p^T A_{11}\dot q_p,\ T_2^c=0{,}5\,\dot q_c^T A_{22}\dot q_c,\ T_2^{pc}=\dot q_p^T A_{12}\dot q_c,$$

$$T_1^p=\dot q_p^T b_1,\quad T_1^c=\dot q_c^T b_2,\quad T_0=C(q_p,t),\quad A_{12}=A_{21}^T.$$

Применяя оператор Эйлера с учетом (I.26), получим для (I.27)

$$\Sigma_{q_c}\{T\}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q_p,\dot q_p,\dot q_c,t)}{\partial \dot q_c}\right)=0. \qquad (I.29)$$

Это означает, что

$$\frac{\partial T(q_p, \dot{q}_p, \dot{q}_c, t)}{\partial \dot{q}_c} \triangleq p_c(q_p, \dot{q}, t) = \beta, \qquad (I.30)$$

где $\beta \in R^{n_M - n_p}$ - вектор постоянных интегрирования.

Таким образом уравнение Лагранжа для циклических координат (I.29) допускает интегрирование и вектор циклических импульсов p_c остается постоянным во всем времени движения. Из (I.28) и (I.30) имеем

$$A_{22}(q_p, t)\,\dot{q}_c + b_2(q_p, t) + A_{12}^T(q_p, t)\,\dot{q}_p = \beta. \qquad (I.31)$$

Здесь $A_{22}(q_p, t)$ также невырождена как и $A(q_p, t)$ и уравнение (I.31) разрешимо относительно циклических скоростей

$$\dot{q}_c = A_{22}^{-1}\left(-b_2 - A_{12}^T \dot{q}_p + \beta\right) = f_c(q_p, \dot{q}_p, \beta, t). \qquad (I.32)$$

Уравнение Лагранжа для позиционных координат получим с подстановкой (I.32) в выражение

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T(q_p, \dot{q}_p, \dot{q}_c, t)}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial T(q_p, \dot{q}_p, \dot{q}_c, t)}{\partial q}\right]_{\dot{q}_c = f_c} =$$

$$= \frac{\partial \Pi(q_p, t)}{\partial q_p} + Q_p^{нп}(q_p, \dot{q}_p, t). \qquad (I.33)$$

Таким образом, наличие циклических координат приводит к декомпозиции уравнений движения МС на невзаимосвязанные подсистемы (I.32), (I.33) и поэтому возможно исключение циклических скоростей (I.32) из (I.33), что сводит $2n_M$ -мерное описание МС с $n_M - n_p$ циклическими координатами в дифференциальной системе порядка $2n_p$ относительно вектора позиционных координат q_p.

Процедура Рауса исключения циклических координат. Вводится скалярная функция Рауса

$$T_R(q_p, \dot{q}_p, \beta, t) = \left[T(q_p, \dot{q}_c, t) - \beta^T \dot{q}_c\right]_{\dot{q}_c = f_c}, \qquad (I.34)$$

которая с учетом (I.30), (I.32) удовлетворяет равенствам

$$\frac{\partial T_R}{\partial q_p} = \frac{\partial T}{\partial q_p}, \quad \frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_p} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_p}, \quad \frac{\partial T_R}{\partial \beta} = -\dot{q}_c.$$

Уравнение (I.33) относительно q_p и $\dot{q}_p$ выглядит

$$\mathcal{E}\{T_R\} = \mathcal{E}\{\Pi\} + Q^{нп}(q_p, \dot{q}_p, t), \qquad (I.35)$$

и имеет структуру уравнений Лагранжа, где роль кинетической энергии выполняет функция Рауса, записанная относительно позиционных координат, а циклические координаты q_c "игнорируются". После подстановки (I.34) в (I.35) и интегрирования циклические координаты определяются как $q_c(t) = -\int_{t_0}^{t} \frac{\partial T_R(q_p, \dot{q}_p, t)}{\partial \beta} d\tau + q_c(t_0)$ или, что то же, определяются интегрированием (I.32)

$$q_c(t) = \int_{t_0}^{t} \left[A_{22}^{-1} \left(\beta - A_{12}^T \dot{q}_p - b_2 \right) \right] d\tau + q_c(t_0) .$$

Структура уравнений Рауса. Отметим, что $\beta^T \dot{q}_c = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} \dot{q}_c = 2T_2^c + T_2^{pc} + T_1^c$, где $T_2^c = 0{,}5\, \dot{q}_c^T A_{22} \dot{q}_c$, $T_2^{pc} = \dot{q}_p^T A_{11} \dot{q}_c$, $T_1^c = \dot{q}_c^T b_2$. Окончательно

$$T_R = \left[T_2^p + T_2^c + T_2^{pc} + T_1^p + T_1^c + T_0 - 2T_2^c - T_2^{pc} - T_1^c \right] = \left[T_2^p - T_2^c + T_1^p + T_0 \right]_{\dot{q}_c = \dot{q}_c} \quad \text{(I.36)}$$

Рассмотрим структуру функций Рауса (I.36) с учетом выражения $\dot{q}_c$ из (I.32)

$$T_2^c = 0{,}5\, \dot{q}_c^T A_{22} \dot{q}_c = 0{,}5 \left[(\beta - b_2) - A_{12}^T \dot{q}_p \right]^T A_{22}^{-1} \left[(\beta - b_2) - A_{12}^T \dot{q}_p \right] =$$

$$= (0{,}5\, \dot{q}_p A_{12} A_{22}^{-1} A_{12}^T \dot{q}_p) - \left[\dot{q}_p A_{12} A_{22}^{-1} (\beta - b_2) \right] +$$

$$+ \left\{ 0{,}5 (\beta - b_2)^T A_{22}^{-1} (\beta - b_2) \right\} = T_{22}^p + T_{21}^p + T_{20} .$$

Таким образом, по (I.36) имеем

$$T_R(q_p, \dot{q}_p, \beta, t) = (T_2^p - T_{22}^p) + (T_1^p - T_{21}^p) + (T_0 - T_{20}) . \quad \text{(I.37)}$$

Известно [I], что если $T > 0$, то и $T_2^p - T_{22}^p > 0$ и уравнения Рауса разрешимы относительно вторых производных позиционных координат q_p. Особенностью МС с циклическими координатами является то, что даже при стационарных связях функция Рауса (I.36) или (I.37) не является квадратичной формой позиционных скоростей как кинетическая энергия в общем случае $(T = T_2 + T_1 + T_0)$, а по-прежнему сохраняет структуру квадратного трехчлена относительно $\dot{q}_p$. Действительно, в стационарном случае $T_1^p = 0$, $T_0 = 0$, $b_2 = 0$ и

$$T_R(q_p,\dot{q}_p,\beta)=\left[T_2^p-T_2^c\right]\dot{q}_c=f_c = T_2^p - T_{22}^p - T_{21}^p - T_{20}\,.$$

Раскрывая последние слагаемые, получаем $T_R(q_p,\dot{q}_p,\beta)=$

$$=\left\{0{,}5\,\dot{q}_p\left(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T\right)\dot{q}_p\right\}+\left[\dot{q}_p^T A_{12}A_{22}^{-1}\beta\right]-\left(0{,}5\,\beta^T A_{22}^{-1}\beta\right)=$$

$$=\left\{T_{R2}\right\}+\left[T_{R1}\right]+\left(T_{R0}\right).$$

Применим оператор Эйлера к последнему выражению:

$$\mathcal{E}\left\{T_R\right\}=A^p(q_p)\ddot{q}_p+a^p(q_p,\dot{q}_p)\;;\;\mathcal{E}\left\{T_{R1}\right\}=G^p(q_p)\dot{q}_p\;;$$

$$\mathcal{E}\left\{T_{R0}\right\}=\frac{\partial}{\partial q_p}\left(0{,}5\,\beta^T A_{22}^{-1}(q_p)\beta\right),\;A^p=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^T>0,$$

$$a^p=\left\{a_j^p\right\}=\left\{\dot{q}_p^T\left[\frac{\partial\left(A_{*j}^p\right)^T}{\partial q_p}-0{,}5\,\frac{\partial A^p}{\partial q_{pj}}\right]\dot{q}_p\right\},\;j=1,\ldots,n_p,$$

где $G^p(q_p)=\dfrac{\partial\left(A_{12}A_{22}^{-1}\beta\right)}{\partial q_p^T}-\dfrac{\partial\left[\beta^T A_{22}^{-1}A_{12}^T\right]}{\partial q_p}$ – кососимметричная $n_p\times n_p$ -матрица гироскопических сил.

Уравнение Рауса для стационарной системы с циклическими координатами можно представить в следующей явной записи:

$$A^p(q_p)\ddot{q}_p+a^p(q,\dot{q}_p,t)=-\frac{\partial\Pi_R(q_p,\beta,t)}{\partial q_p}-$$

$$-G^p(q_p)\dot{q}_p+Q^{HП}(q_p,\dot{q}_p,t)\,. \qquad (I.38)$$

Здесь $\Pi_R(q_p,\beta,t)=\Pi(q_p,t)-T_{R0}(q_p,\beta)=\Pi(q_p,t)+$

$+0{,}5\,\beta^T A_{22}^{-1}(q_p)\,\beta$ – потенциальная функция Рауса МС с циклическими координатами.

Уравнению (I.38) можно сопоставить некоторую эквивалентную МС с кинетической $T_{R2}(q_p,\dot{q}_p)$ и потенциальной $\Pi_R(q_p,t)$ энергиями и гироскопическими силами с кососимметричной функциональной матрицей $G^p(q_p)$. Таким образом, изучая движение МС с циклическими координатами только по движению позиционных координат, приходим к представлению о некоторой эквивалентной МС пониженного порядка, влияние на движение которой со стороны "скрытых" циклических координат будет заключаться в перераспределении коэффициентов инерции $\left(T_{R2}\neq T_2^p\right)$, в появлении гироскопических сил и в изменении потенциальной энергии $\left(\Pi_R\neq\Pi\right)$. Отметим, что возможно и отсутствие гиро-

скопических - гироскопически несвязанный случай.

Пример. Рассмотрим полученные в предыдущем примере уравнения движения эллиптического маятника, показанного на рис.I.2. Отметим, что если пренебречь трением в оси маятника $b_2 = 0$, то для координаты q_1 выполняются условия (I.26)

$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0, \quad Q^{нп}(q_1) = 0$, поэтому координата $q_1 = q_c$ - циклическая, а координата $q_2 = q_p$ - позиционная. Движение в этом случае описывается уравнениями (а),(б)

$$m\ddot{q}_c + m_2 l \ddot{q}_p \cos q_p - m_2 l \dot{q}_p^2 \sin q_p = 0, \; m = m_1 + m_2, \quad (а)$$

$$J\ddot{q}_c + m_2 l \ddot{q}_c \cos q_p = -m_2 g l \sin q_p - b_2 \dot{q}_p, \; J = m_2 l^2. \quad (б)$$

и циклической координате соответствует импульс, вычисляемый по (I.30)

$$p_c = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_c} = m\dot{q}_c + m_2 l \dot{q}_p \cos q_p = \beta, \quad (в)$$

где β - постоянная интегрирования; p_c - циклический импульс, постоянный во все время движения. Интегрируя, получаем ($t_0 = 0$) $m q_c + m_2 l \sin q_p = \beta t + \gamma$,

где постоянные интегрирования β, γ определятся по начальным данным $q_c^\circ, \dot{q}_c^\circ, q_p, \dot{q}_p^\circ$ как

$$\beta = m\dot{q}_c^\circ + m_2 l \dot{q}_p^\circ \cos q_p^\circ, \quad \gamma = m q_c^\circ + m_2 l \sin q_p^\circ.$$

Решение уравенинния для циклической координаты запишем в виде

$$q_c(t) = \frac{m_2 l}{m}\left(-\sin q_p(t) + \sin q_p^\circ\right) + \left(\dot{q}_c^\circ + \frac{m_2 l}{m}\dot{q}_p^\circ \cos q_p^\circ\right)t + q_c^\circ \quad (г)$$

Дважды дифференцируя выражение (г) и подставляя в уравнение (б), получим уравнение для позиционной координаты

$$J\ddot{q}_p + \left(\frac{m_2 l}{m}\right)^2 \cos q_p \left(\dot{q}_p^2 \sin q_p - \ddot{q}_p \cos q_p\right) = -m_2 l g \sin q_p - b_2 \dot{q}_p. \quad (д)$$

В данном случае нам удалось проынтегрировать уравнение для циклического импульса и, исключая решение для циклической координаты, получить дифференциальное уравнение для позиционной координаты. Однако решение $q_c(t)$ редко удается

получить в замкнутой форме, тогда как, пользуясь процедурой Рауса, процесс исключения циклической координаты формализуется во всех без исключения случаях. В рассматриваемом примере составим функцию Рауса в виде (I.34) и подставляя в нее выраженную из (в) циклическую скорость, преобразуем T_R к виду

$$T_R = (T - \beta^T \dot{q}_c) = T_{R2} + T_{R1} + T_{R0} = 0{,}5\, \dot{q}_p^2 (J - m_2 l \cos q_p) + \\ + \beta \frac{m_2 l \cos q_p}{m} \dot{q}_p - 0{,}5 \frac{b^2}{m}.$$

Составляя для T_R уравнения Рауса (I.35)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_R}{\partial \dot{q}_p}\right) - \frac{\partial T_R}{\partial q_p} = -m_2 g l \sin q_p - b_2 \dot{q}_p$$

и выполняя операции дифференцирования, сразу получим дифференциальное уравнение для позиционной координаты (из которого q_c исключена) в виде, совпадающим с уравнением (д), но уже по формальным правилам (не прибегая к интегрированию), которые не ограничены ни порядком, ни нелинейной постановкой задачи.

I.4. Упругие многомассовые механические системы

Соединение конечного числа точечных масс упругими связями, образующими пространственный многогранник, в котором в общем случае каждая масса соединена упругой связью с другой массой и через соответствующую упругую связь соединена с основанием, скрепленным с инерциальной (неподвижной) системой координат, называется пространственной конечномерной упругой МС.

Если движение всех масс ограничено плоскостью, то упругая МС называется плоской.

Если движение всех масс одинаково ориентировано (прямолинейное движение, вращение), то такие упругие МС называются однолинейными цепными упругими МС. Ограничимся рассмотрением последних.

При выводе уравнений упругих масс примем следующие предположения: упругие силы потенциальны и являются линейной функцией упругих деформаций; потери при деформациях носят характер вязкого трения; направления упругих сил совпадают с направлением упругих связей; в качестве обобщенных координат

принять упругие деформации q_y отсчитываемые от недеформируемых состояний.

Расчетные соотношения однолинейной цепной упругой МС. Пусть упругая МС состоит их m_i точечных масс, $i \in \overline{1,n}$. Выберем произвольно вектор $r = [r_1, \dots, r_n]^T$. Состояние равновесия охарактеризуем вектором $r^o = [r_1^o, \dots, r_n^o]^T$, когда упругие связи недеформированы.

Введем обобщенные координаты $q_i = r_i - r_i^o$, $i \in \overline{1,n}$. Кинетическую энергию однолинейной упругой МС запишем в виде $T = 0{,}5\, \dot{r}^T M \dot{r}$, где $M = diag(m_1, m_2, \dots, m_n)$, $\dot{r}_i = \dot{r}_i^o + \dot{q}_i = \dot{q}_i$, $r_i^o = const$, или $T = 0{,}5\, \dot{q}^T A \dot{q}$, $A = M$, $A = diag(m_1, m_2, \dots, m_n)$. Потенциальную энергию звена, представляющего собой соединение i-й и j-й точечных масс упругой связью с жесткостью p_{ij} запишем в виде $\Pi_{ij} = 0{,}5\,(q_i - q_j)^2 p_{ij}$, где $q_i - q_j = q_{yij}$ - деформация упругой связи, соединяющая i-ю и j-ю точечные массы.

Потенциальную энергию амортизатора, представляющего собой упругое соединение k-й точечной массы с неподвижным основанием, запишем в виде $\Pi_k = 0{,}5\, q_k^2 p_k$, где q_k - деформация амортизатора, а p_k - его коэффициент жесткости.

Полная запасенная энергия упругой МС имеет вид

$$\Pi(q) = 0{,}5 \sum_{i=1}^{h} [(q_i - q_j)^2 p_{ij}]_i + 0{,}5 \sum_{k=1}^{s} q_k^2 p_k = 0{,}5 q^T C q, \quad (I.39)$$

где h - число упругих связей между массами, s - число амортизаторов.

Диссипативная функция, отвечающая потерям на внешнее вязкое трение масс m_i с коэффициентами трения d_i имеет вид $R_d(\dot{q}) = 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i^2 d_i = 0{,}5\, \dot{q}^T R_d \dot{q}$, где R_d - матрица внешнего трения, диагональная и неотрицательная. Отметим, что по виду матрица R_d совпадает с матрицей A (с заменой масс у матрицы A на коэффициенты вязкого трения).

Диссипативная функция, отражающая внутреннее вязкое трение в упругих связях p_{ij} и амортизаторах p_k с коэффициентами трения β_{ij}, β_k соответственно запишем в виде

$$\mathcal{R}_\beta(\dot q)=0{,}5\sum_{i=1}^{h}\left[(\dot q_i-\dot q_j)^2 b_{ij}\right]_\ell+0{,}5\sum_{k=1}^{s}\dot q_k^2 b_k=0{,}5\,\dot q^T R_\beta \dot q, \quad (I.40)$$

где R_β – симметричная неотрицательная матрица, совпадающая по структуре с матрицей C в (I.39), если в матрице C коэффициенты c_{ij} заменить на коэффициенты b_{ij}, а P_k на b_k соответственно.

Проекции внешних сил, приложенных к m из n масс, на направления обобщенных координат запишем в виде $Q^u = Bu$, где B – $n\times m$ матрица коэффициентов проекций Q^u-вектора внешних сил.,

С учетом выше введенных энергий и сил уравнения Лагранжа для однолинейной цепной упругой МС с учетом соотношений

$$\frac{\partial}{\partial \dot q}(0{,}5\dot q A\dot q)=A\dot q,\ \frac{d}{dt}(A\dot q)=A\ddot q,\ \frac{\partial}{\partial q}(\dot q^T A\dot q)=0,$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q}=Cq,\ \frac{\partial}{\partial \dot q}\mathcal{R}_d=R_d\dot q,\ \frac{\partial}{\partial \dot q}\mathcal{R}_\beta=R_\beta\dot q$$

имеет вид

$$A\ddot q+(R_d+R_\beta)\dot q+Cq=Bu. \quad (I.41)$$

Отметим, что нет необходимости каждый раз выводить уравнения Лагранжа упругих МС, а достаточно изучить строение матриц A, B, C, R_d, R_β и получить правила для их составления. Как следует из определения потенциальной энергии, $C=\frac{\partial^2\Pi}{\partial q\partial q^T}$ и элементы матрицы C определяются как

$$c_{ij}=\frac{\partial^2\Pi_i}{\partial q_i\partial q_j}=\frac{\partial^2\left\{0{,}5\sum_{i=1}^{\kappa}\left[P_{ij}(q_i-q_j)^2\right]_k+0{,}5\sum_{i=1}^{s}P_k q_k^2\right\}}{\partial q_i\partial q_j}. \quad (I.42)$$

Для вычисления диагонального элемента c_{ij} из (I.42) имеем

$$c_{ii}=\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial\Pi}{\partial q_i}\right)=\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{h}P_{ij}(q_i-q_j)+\sum_{k=1}^{s}P_k q_k\right]=\sum_{j=1}^{h}P_{ij}+P_k, \quad (I.43)$$

Таким образом, диагональные элементы матрицы представляют собой сумму коэффициентов упругости связей, сеединяющих i-ю массу со всеми другими массами и коэффициента упругой связи, соединяющих i-ю массу с основанием.

Необходимо обратить внимание на то, что предварительно все параллельные и последовательные упругие связи между i-й и j-й массами и k-й массой с основанием должны быть

эквивалентированы одной упругой связью (амортизатором) по следующим формулам. При последовательном соединении l упругих связей с жесткостями $\rho_1, \dots, \rho_l$ эквивалентная жесткость $\rho_э$ рассчитывается как $\rho_э^{-1} = \sum_{i=1}^{l} \rho_i^{-1}$, а при параллельном соединении l связей – $\rho_э = \sum_{i=1}^{l} \rho_i$.

Для вычисления внедиагонального элемента c_{ij} из (I.42) имеем

$$c_{ij} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}\right) = \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\sum_{k=1}^{h} \rho_{ij}(q_i - q_j) + \sum_{k=1}^{s} \rho_k q_k\right] = -\rho_{ij}, \quad (I.44)$$

т.е. внедиагональный i,j и ему симметричный j,i – элементы матрицы C равны взятой с обратным знаком жесткости упругой связи между i-й и j-й массами.

Отметим следующие важные свойства матрицы упругости, используемые для проверки правильности ее составления.

А. Сумма элементов строки матрицы C либо равна нулю, если масса m_i не соединена амортизатором с основанием, либо равна коэффициенту упругости i-го амортизатора, соединенного с массой.

Б. Если какие-либо две массы m_i, m_j не соединены упругой связью, то два внедиагональных i,j-й и j,i-й симметрично расположенных элемента равны нулю.

В. Матрица C не имеет ненулевых элементов, если упругая МС имеет максимально разветвленную структуру, когда все точечные массы соединены друг с другом упругими связями, максимальное число которых равно $h = 0{,}5\,n(n-1)$.

Трехдиагональная структура матрицы C (ненулевые главная диагональ, наддиагональ и поддиагональ) соответствуют неразветвленной однолинейной многомассовой цепной МС.

Матрица внутреннего трения R_β (I.40) совпадает по структуре с матрицей C и получается из матрицы C заменой элементов c_{ij} на элементы $r_{\beta ij}$.

Рассмотрим структуру матрицы управления B. Пусть проекции управляющей силы u_i приложенной к массе m_i на направление Ox однонаправленной МС выражаются в виде $u_{ix} = b_i^x u_i$, b_i^x – постоянные. Тогда $n \times m$-мерная матрица B составленная из коэффициентов b_i^x будет иметь вид

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{bmatrix}, \qquad (I.45)$$

где b_i являются матрицами-столбцами неодинаковой размерности $n_i \times 1$, $n_i = k$, где k - номер массы, к которой приложено управление u_i и только один нижний элемент каждого столбца b_i не равен нулю.

Пример. Структура упругой МС с поступательным движением масс показана на рис. I.3.

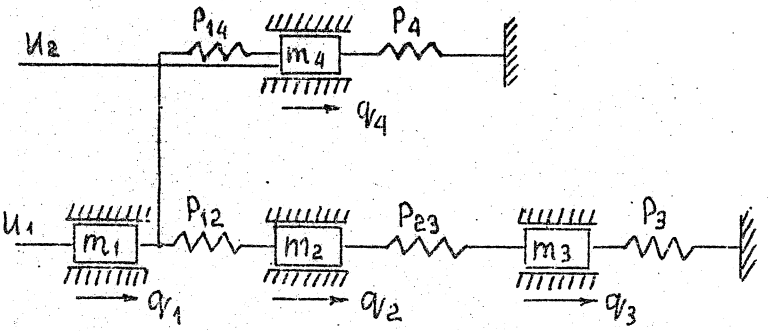

Рис. I.3

Пусть все коэффициенты внутреннего (r_{ij}^{δ}) и внешнего (r_i^d) трений не равны нулю. Кроме того число масс и внешних сил соответственно равны $n = 4$, $m = 2$, $q = [q_1, q_2, q_3, q_4]^T$, $u = [u_1, u_2]^T$. Матрицы A и R_d являются диагональными в (I.4I)

$$A = \begin{bmatrix} m_1 & & & 0 \\ & m_2 & & \\ & & m_3 & \\ 0 & & & m_4 \end{bmatrix}, \quad R_d = \begin{bmatrix} r_1^d & & & 0 \\ & r_2^d & & \\ & & r_3^d & \\ 0 & & & r_4^d \end{bmatrix}.$$

Матрица C (и вслед за ней $R_б$) составляется по описанным выше правилам (I.43), (I.44)

$$C = \begin{bmatrix} P_{12}+P_{13}+P_{14} & -P_{12} & -P_{13} & -P_{14} \\ -P_{12} & P_{12}+P_{23} & -P_{23} & 0 \\ -P_{13} & -P_{23} & P_{13}+P_{23}+P_3 & 0 \\ -P_{14} & 0 & 0 & P_{14}+P_4 \end{bmatrix},$$

$$R_б = \begin{bmatrix} r^б_{12}+r^б_{13}+r^б_{14} & -r^б_{12} & -r^б_{13} & -r^б_{14} \\ -r^б_{12} & r^б_{12}+r^б_{23} & -r^б_{23} & 0 \\ -r^б_{13} & -r^б_{23} & r^б_{13}+r^б_{23}+r^б_3 & 0 \\ -r^б_{14} & 0 & 0 & r^б_{14}+r^б_4 \end{bmatrix},$$

Далее с учетом (I.45)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Пример. 3-х массовая упругая МС с вращательным движением показана на рис. I.4. Предположим, что

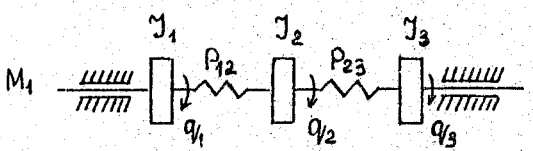

Рис. I.4

Уравнения этой МС будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} P_{12} & -P_{12} & 0 \\ -P_{12} & P_{23}+P_{12} & -P_{23} \\ 0 & -P_{23} & P_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Пример. 2-х массовая упругая МС с вращательным движением показана на рис. I.5.

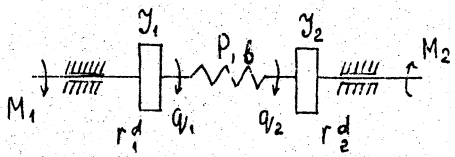

Рис. I.5

Также в соответствии с правилами (I.43), (I.44), (I.45) составления уравнений Лагранжа для упругих МС имеем

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho & -\rho \\ -\rho & \rho \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1^d + r^b & -r^b \\ -r^b & r_2^d + r^b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_1 \\ -M_2 \end{bmatrix}.$$

I.5. Влияние различных сил на устойчивость системы

В этом параграфе ограничимся рассмотрением систем, описываемых уравнениями Лагранжа с постоянными коэффициентами. При этом правая часть уравнений в общем случае может быть нелинейной функцией обобщенных координат и скоростей. Не вдаваясь в анализ физической природы координат q и рассматриваемого явления, будем говорить, что значениям $q = 0$ и $\dot{q} = 0$ отвечает равновесие системы, в частности, МС, а уравнения Лагранжа (I.18) описывают возмущенное движение около положения равновесия. Поэтому, говоря об устойчивости равновесия системы, нужно иметь в виду, что рассматриваемая система может быть необязательно механической системой, а например, электромеханической. В этом случае вектор обобщенных координат и скоростей содержит или пополняется вектором электромагнитных компонент.

Задача ставится следующим образом: как определить характер устойчивости равновесия системы при влиянии на нее различных обобщенных сил. Дальнейшее изложение параграфа опирается на книгу [2].

Будем рассматривать системы вида

$$A\ddot{q} + R_1\dot{q} + C_1 q = Q,$$

в которой разложение сил по степеням содержит линейные члены. Здесь A - определенно-положительная симметричная матрица, R и C - некоторые квадратные матрицы; составляющие вектора Q содержат q и $\dot{q}$ в степени выше первой в результате линеаризации исходного нелинейного уравнения, а левая часть уравнения представляет собой описание системы по первому приближению.

Разобъем матрицы R_1 и C_1 в последнем уравнении на симметричные и кососимметричные части, т.е. $R_1 = R + G$, $C_1 = C + P$, где $R = 0{,}5(R_1 + R_1^T)$ - симметричная; $G = 0{,}5(R_1 - R_1^T)$ - кососимметричная; $C = 0{,}5(C_1 + C_1^T)$ - симметричная; $P = 0{,}5(C_1 - C_1^T)$ - кососимметричная. Тогда получим

$$A\ddot{q} + R\dot{q} + G\dot{q} + Cq + Rq = Q, \qquad (I.46)$$

где все слагаемые в левой части линейные относительно q и $\dot{q}$ выражают обобщенные силы (диссипативные, гироскопические, потенциальные и псевдогироскопические соответственно). Как видно, выделение гироскопических сил $G\dot{q}$ и псевдогироскопических сил Pq произошло несколько искусственно в результате разбиения матриц R_1 и C_1 на симметричные и кососимметричные части.

Уравнения возмущенного движения (I.46) можно представить в двух других формах. Для этого введем преобразование координат $q = \Lambda z$, где Λ - ортогональная матрица преобразования. После подстановки в уравнение (I.46) и умножения последнего слева на Λ^T получим

$$\Lambda^T A \Lambda \ddot{z} + \Lambda^T R \Lambda \dot{z} + \Lambda^T G \Lambda \dot{z} + \Lambda^T C \Lambda z + \Lambda^T P \Lambda z = \Lambda^T Z_1. \qquad (I.47)$$

Относительно матрицы A известна следующая теорема. Если квадратные матрицы A и C порядка n - симметричны, причем матрица A - знакоопределенная, то:

1) все корни характеристического уравнения $\det(A\lambda + C) = 0$ вещественны;

2) всегда найдется такая неособенная матрица Λ, что $\Lambda^T A \Lambda = I$ - единичная матрица, $\Lambda^T C \Lambda = C_0$ - диагональная матрица, т.е. $C_0 = diag(c_1, c_2, \dots, c_n)$ причем $c_1, c_2, \dots, c_n$ равны корням характеристического уравнения.

Применяя эту теорему к матрицам A и C, а затем к матрицам A и R, уравнение (I.47) можно представить в двух видах:

$$\ddot{z} + R\dot{z} + G\dot{z} + C_0 z + Pz = Z,$$
$$\ddot{z} + R_0\dot{z} + G\dot{z} + Cz + Pz = Z, \qquad (I.48)$$

где для простоты $\Lambda^T R \Lambda, \Lambda^T G \Lambda, \Lambda^T P \Lambda, \Lambda^T C \Lambda$ в силу сохранения свойств симметричности и кососимметричности (что легко показать) обозначены через R, G, P и C соответственно.

В частности, если R_0 и C_0 - диагональные, то

$$\left.\begin{aligned} \det\Lambda^T \det R \det\Lambda &= \Delta^2 \det R = r_1 r_2 \dots r_n, \\ \det\Lambda^T \det C \det\Lambda &= \Delta^2 \det C = c_1 c_2 \dots c_n \end{aligned}\right\} \qquad (I.49)$$

при этом $\det\Lambda^T = \det\Lambda = \Delta = 1$.

В дальнейшем нам потребуется только уравнение (I.48).

Коэффициенты устойчивости. Рассмотрим потенциальную систему, на которую действуют только одни потенциальные силы ($C \neq 0$ и $R = G = P = Z = 0$). Описание системы представляет собой n невзаимосвязанных уравнений невозмущенного движения

$$\left.\begin{aligned} \ddot{z}_1 + c_1 z_1 &= 0, \\ &\vdots \\ \ddot{z}_n + c_n z_n &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (I.50)$$

Если $c_i > 0$ (полагаем $c_i = \omega_i^2$), то решением (I.50) будет $z_i = A_i \sin(\omega_i t + \varphi_i)$, если $c_i < 0$ (полагаем $c_i = -\xi^2$), то $z_i = A_i e^{\xi_i t} + B_i e^{-\xi_i t}$, A_i, B_i - постоянные интегрирования. Отсюда видно, что если все $c_i > 0$ то невозмущенное движение $z_i = 0$, $\dot{z}_i = 0$ устойчиво (решение ограничено). Каждому отрицательному числу c_i если оно есть, отвечает неустойчивая координата z_i и невозмущенное движение неустойчиво, даже при любых нелинейных силах.

Числа c_i называются коэффициентами устойчивости, а число отрицательных чисел c_i - степенью неустойчивости. В дальнейшем будет иметь значение не степень неустойчивости, а его четность. Из равенств (I.49) следует, что если число отрицательных коэффициентов c_i четное, то произведение $c_1 \dots$

... $C_n > 0$ и следовательно $\det C > 0$, если - нечетное, то $C_1 \cdot C_2 \cdots C_n < 0$ и $\det C < 0$. Так как знак произведения $C_1 C_2 \cdots C_n$ совпадает со знаком $\det C$, то можно анализировать устойчивость, не прибегая к преобразованию координат.

Пример. Пусть $C = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. $\det C = -9$.

Можно утверждать, что есть отрицательные коэффициенты устойчивости и число их нечетное. Поскольку размерность системы равна 2, то имеется только одна неустойчивая координата.

Пример. Пусть $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. $\det C = 14$.

По критерию Сильвестра (а он здесь применим, так как матрица симметричная), $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = 14$. То, что $\Delta_2 < 0$ означает наличие неустойчивых координат, а $\Delta_3 > 0$ означает, что имеются две неустойчивые координаты.

Влияние диссипативных и гироскопических сил на устойчивость движения потенциальной системы. Пусть, например, у системы $\ddot{z}_1 + C_1 z = 0$, $\ddot{z}_2 + C_2 z_2 = 0$ коэффициенты $C_1 < 0$, $C_2 < 0$, что означает, что $z = 0$, $\dot{z} = 0$ неустойчиво, $z = [z_1, z_2]^T$.

Возникает вопрос: нельзя ли стабилизировать эту систему, присоединив к потенциальным гироскопические силы, а именно: $g\dot{z}_2, -g\dot{z}_1$,

$$\ddot{z}_1 + g\dot{z}_2 + C_1 z_1 = 0,$$
$$\ddot{z}_2 - g\dot{z}_1 + C_2 z_2 = 0.$$

Составим характеристическое уравнение

$$\det \begin{bmatrix} \lambda^2 + C_1 & g\lambda \\ -g\lambda & \lambda^2 + C_2 \end{bmatrix} = \lambda^4 + (g^2 + C_1 + C_2)\lambda + C_1 C_2 = 0.$$

Так как λ здесь в четной степени, то каждому корню λ будет соответствовать корень $-\lambda$. Поэтому, если действительная часть хотя бы одного корня не равна нулю, то найдется корень с вещественной положительной частью. Тогда устойчивость наступит только в том случае, если все корни характеристического уравнения чисто мнимые, т.е. $\lambda^2 < 0$

Для выполнения этого неравенства необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты характеристического уравнения удовлетворяли бы условиям $C_1C_2>0$, $g^2+C_1+C_2>0$, $(g^2+C_1+C_2)-4C_1C_2>0$. С учетом $C_1<0$, $C_2<0$ эти условия сводятся к одному условию $|g|>\sqrt{-C_1}+\sqrt{-C_2}$. Таким образом, получаем стабилизацию МС с помощью гироскопических сил.

Общим результатом относительно влияния гироскопических сил на потенциальную систему является :

Первая теорема Томсона и Тета. Если неустойчивость невозмущенного движения потенциальной системы имеет нечетную степень, то стабилизировать движение системы нельзя никакими гироскопическими силами (необходимое условие).

Действительно, поскольку никакими гироскопическими силами нельзя повлиять на знак $\det C$, то, если он отрицательный, неустойчивость системы сохраняется при любых гироскопических силах.

Добавление к потенциальной МС с гироскопическими силами диссипативных сил. Результат влияния диссипативных сил в этом случае выражается следующими теоремами Томсона и Тета.

Вторая теорема Томсона и Тета. Если невозмущенное движение $z=0, \dot{z}=0$ потенциальной системы устойчиво, *) то при добавлении произвольных гироскопических сил и диссипативных сил (не обязательно с полной диссипацией) устойчивость движения сохраняется.

Третья теорема Томсона и Тета. Если невозмущенное движение $z=0, \dot{z}=0$ устойчиво при одних потенциальных силах, то оно становится асимптотически устойчивым при добавлении произвольных гироскопических и диссипативных сил с полной диссипацией.

Четвертая теорема Томсона и Тета. Невозмущенное движение $z=0, \dot{z}=0$ неустойчивое под действием потенциальных и диссипативных сил остается неустойчивым при добавлении любых

---

*) Понятие устойчивости (по Ляпунову), асимптотической устойчивости, а также других видов устойчивости, в том числе и диссипативности подробно изложены в учебном пособии по курсу "Идентификация и адаптация автоматических систем" [9].

гироскопических сил, если последние обладают полной диссипацией.

Здесь диссипативные силы могут быть сколь угодно малыми. Таким образом, если неустойчивую систему стабилизировать гироскопическими силами, то при наличии любых малых диссипативных сил с полной диссипацией, что практически всегда имеет место, последние с течением времени разрушают достигнутую устойчивость. Устойчивость при потенциальных силах Томсон и Тет назвали вековой устойчивостью и соответствующее характеристическое уравнение относительно λ^2 - вековым. Устойчивость же, достигнутая с помощью гироскопических сил, была названа временной.

Рассмотрим другие частные действия на систему различных сил.

Одни гироскопические силы, т.е. $\ddot{z} + G\dot{z} = 0$. В этом случае невозмущенное движение $z = 0,\ \dot{z} = 0$ системы всегда устойчиво относительно скоростей. Если же $\det |G| \neq 0$, то это эквивалентно устойчивости относительно координат. Причем, последняя устойчивость является конечно негрубой. Отметим, что если порядок матрицы G - нечетное число, то $\det G$ тождественно равен нулю.

Гироскопические и диссипативные силы, т.е. $\ddot{z} + B_0\dot{z} + G z = 0$. Если здесь матрица B_0 - неособенная, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво относительно скоростей и устойчиво относительно координат.

Одни псевдогироскопические (неконсервативные) силы, т.е. $\ddot{z} + P z = Z$. Невозмущенное движение в этом случае всегда неустойчиво независимо от членов высшего порядка (имеется в виду наличие правой части).

Псевдогироскопические и потенциальные силы, т.е. $\ddot{z} + C_0 z + P z = 0$. Здесь псевдогироскопические системы могут стабилизировать неустойчивую потенциальную систему, все зависит от собственных значений матрицы $C_0 + P$, определяющих корни векового уравнения.

Рассмотрим общий случай, а именно,

$$\ddot{z} + R_0\dot{z} + G\dot{z} + Cz + Pz = Z.$$

При отсутствии нелинейных членов $(Z = 0)$ асимптотическая устойчивость системы по координатам не может быть дос-

тигнута без диссипативных сил.

Если $\det(C+P)<0$ то указанная система неустойчива при любых гироскопических диссипативных, ускоряющих и нелинейных силах Z.

Пример. Гироскопический однорельсовый вагон (рис. I.6). Центр тяжести вагона G находится выше рельса, поэтому координата ψ неустойчива. По первой теореме Томсона и Тета гироскопически стабилизировать можно только при четном числе неустойчивых координат. С этой целью в вагоне устанавливается подвижное кольцо K поворота (угол ϑ) вокруг горизонтальной оси. Одновременно это кольцо является подвесом гироскопа Γ. Для осуществления гироскопической стабилизации искусственно обеспечивается неустойчивость второй координаты ϑ с помощью установки в неустойчивое положение кольца дополнительного груза L. Однако имеются силы сопротивления. Согласно четвертой теоремы Томсона и Тета эти силы разрушают гироскопическую стабилизацию. Поэтому вводятся силы другой природы, а именно: создающие ускоряющий момент $K_2\dot{\vartheta}$ (отрицательное трение). Количественный анализ показывает, что можно обеспечить асимптотическую устойчивость движения вагона даже независимо от членов высшего порядка в уравнениях движения.

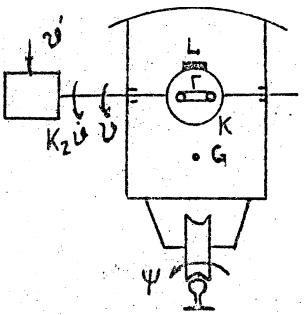

Рис. I.6

I.6. Уравнения Лагранжа-Максвелла для электромеханических систем

Основные понятия и расчетные соотношения для электромеханических систем (ЭМС). Известные методы установления аналогий (электромеханические аналогии) между электрическими и механическими процессами основаны на сходстве формы уравнений движения в механических системах и электромагнитных цепях (ЭМЦ) и уравнения Кирхгофа динамического равновесия в

цепях подобны уравнениям динамического равновесия в МС. Поэтому дифференциальные уравнения для цепей могут быть представлены в форме, аналогичной уравнениям Лагранжа для МС. Функция Лагранжа при этом заменяется на функцию Максвелла для энергии электромагнитного поля и вводятся электрические координаты [4,5].

Обычно поведение ЭМС описывается конечным числом сосредоточенных накопителей энергии: точечных масс, катушек индуктивности и конденсаторов [4,5]. Для ЭМС с голономными механическими связями наряду с механическими независимыми обобщенными координатами устанавливаются аналогичные электрические независимые обобщенные координаты. При этом в соответствии с известными из теории цепей принципом дуальности [4,5] рассматриваются две группы электрических переменных (см. таблицу), аналогичных переменным для МС, в зависимости от того, какая из запасенных энергий электромагнитного поля – электрическая или магнитная – отождествляются с потенциальной энергией, тогда как другая трактуется как кинетическая энергия [5].

Электромеханические аналогии

Механические обобщенные координаты		Электрические обобщенные переменные для групп аналогии	
		Первой	Второй
Координата	q	Заряд ξ	Потокосцепление ψ
Скорость	$\dot{q}$	Ток $I = \dot{\xi}$	Напряжение $E = \dot{\psi}$
Сила	Q	Напряжение с обратным знаком (источники) $-E$	Ток с обратным знаком (источники) $-I$
Импульс	p	Потокосцепление ψ	Заряд ξ

Рассматривая таблицу, отметим, что в первой группе электромеханических аналогий (электрическое поле потенциально) электрические потенциалы аналогичны обобщенным силам, а токи –

обобщенным скоростям, и эти переменные обычно рассматривают в ЭМС с электрическим полем связи, тогда как во второй группе аналогий (магнитное поле потенциально) электрические токи аналогичны обобщенным силам, а электрические потенциалы – обобщенным скоростям, и они чаще используются для электромеханических систем с магнитным полем связи.

Общее число $n_м + n_е$ независимых механических $n_м$ и независимых электрических $n_е$ координат называется числом степеней свободы ЭМС. Для связанной ЭМС вводится представление об электромеханической связи, отражающей тот факт, что полная запасенная энергия электромагнитного поля W_{em} является непрерывной функцией мгновенной конфигурации ЭМС, определяемой значениями механических (и не зависит от ее динамического состояния и предыстории), а изменение запасенной электромагнитной энергии приводит к возникновению обобщенных сил электромеханической связи Q_{em} являющихся непрерывными функциями обобщенных механических координат q и электрических независимых переменных $\xi, \dot{\xi}$ (или $\psi, \dot{\psi}$) причем все эти функции непрерывны и взаимно однозначны, не учитывают гистерезисы, а электрические потери рассматриваются отдельно [5].

Отметим также, что в ЭМС с сосредоточенными параметрами процессы в электрическом и магнитном полях, возникающие при преобразовании электромагнитной энергии в механическую, могут рассматриваться независимо.

Предполагается, что полные запасенные магнитная W_m и электрическая W_e энергии определяются только переменными $\psi(I); q$ или $\xi(E); q$ соответственно и зависят только от конечных значений этих переменных (не зависят от пути интегрирования). Обычно W_m, W_e вычисляются из условия, что сначала в ЭМС совершается механическое движение при поддержании потокосцеплений (токов) равными нулю, а затем подведением энергии от электрических источников оно приводится в конечное электрическое состояние (q –постоянно). В этом случае запасенная энергия магнитного и электрического полей вычисляется по следующим формулам в переменных ξ, q и ψ, q соответственно:

$$W_e(\xi, q) = \int_0^{\xi} E^T(\xi, q)\, d\xi, \qquad (I.51а)$$

$$W_m(\psi, q) = \int_0^{\psi} I^T(\psi, q)\, d\psi. \qquad (I.51б)$$

Здесь и далее переменные, по которым не ведется интегрирование, фиксированы.

Наряду с запасенными магнитной и электрической энергиями рассматриваются магнитная W_m^{co} и электрическая W_e^{co} коэнергии, которые определяются в переменных I, q; E, q соответственно

$$W_m^{co}(I, q) = \int_0^{I} \psi^I(I, q)\, dI, \qquad (I.52а)$$

$$W_e^{co}(E, q) = \int_0^{E} \xi^T(E, q)\, dE, \qquad (I.52б)$$

причем написанные соотношения справедливы ввиду непрерывности и взаимной однозначности функций $I(\psi, q)$ и $\xi(E, q)$ в допустимой области изменения обобщенных механических и электрических координат.

Используя (I.52а) и (I.52б), можно представить W_m и W_e через независимые координаты I, q и E, q соответственно в виде

$$W_m(I, q) = I^T\psi - W_m^{co}, \qquad (I.53а)$$

$$W_e(E, q) = E^T\xi - W_e^{co}(E, q). \qquad (I.53б)$$

Соотношения (I.53а) и (I.53б) выражают связь между энергиями и коэнергиями магнитного и электрического полей.

Обобщенные силы электромагнитной связи, обусловленные изменением запасенных магнитных или электрической энергий, вычисляются из рассмотрения элементарной работы на виртуальных механических перемещениях (вдоль координат q). Так элементарная работа магнитного поля на виртуальных перемещениях вычисляется в переменных I, q как

$$\delta A_m = \delta q^T \frac{\partial W_m^{co}(I, q)}{\partial q} = \delta q^T Q_m, \qquad (I.54а)$$

где $Q_m = \frac{\partial W_m^{co}(I, q)}{\partial q}$ – вектор обобщенных сил электромеханической связи, обусловленных изменением запасенной

магнитной энергии. Элементарная работа электрического поля на виртуальных перемещениях в переменных E, q равна

$$\delta A_e = \delta q^T \frac{\partial W_e^{co}(E,q)}{\partial q} = \delta q^T Q_e, \qquad (I.54б)$$

где $Q_e(E,q) = \frac{\partial W_m^{co}(E,q)}{\partial q}$ – вектор обобщенных сил электромеханической связи, обусловленных изменением запасенной электрической энергии.

Используя соотношения (I.53а) и (I.53б), можно переписать полученные соотношения для обобщенных сил электромеханической связи соответственно:

$$Q_m(I,q) = -\frac{\partial W_m(I,q)}{\partial q} + \frac{\partial \psi^T(I,q)}{\partial q} I - \qquad (I.55а)$$

вектор обобщенных сил электромеханической связи в магнитном поле

$$Q_e(E,q) = -\frac{\partial W_e(E,q)}{\partial q} + \frac{\partial \xi^T(E,q)}{\partial q} E - \qquad (I.55б)$$

вектор обобщенных сил электромеханической связи в электрическом поле.

Кроме того, можно получить выражения тех же сил через другие координаты, т.е.

$$Q_e(\xi,q) = -\frac{\partial W_e(\xi,q)}{\partial q} = \frac{\partial W_e^{co}(\xi,q)}{\partial q} - \frac{\partial E^T(\xi,q)}{\partial q}\xi, \qquad (I.56а)$$

$$Q_m(\psi,q) = -\frac{\partial W_m(\psi,q)}{\partial q} = \frac{\partial W_m^{co}(\psi,q)}{\partial q} - \frac{\partial I^T(\psi,q)}{\partial q}\psi. \qquad (I.56б)$$

Все проведенные расчетные соотношения (I.54 а,б) — (I.56 а,б) для обобщенных сил электромеханической связи, полученные по различным выражениям запасенным энергий и коэнергий (I.51а,б) - (I.53а,б) в тех или иных переменных из первой или второй группы аналогий в вычислениях дают идентичные результаты. Анализируя их, можно обнаружить, что они дуальны в силу известного принципа дуальности для цепей и все выражения энергии, коэнергии и обобщенных сил электромеханической связи в магнитном поле (величины с индексом m) идентичны выражениям соответствующих величин в электрическом поле (с индексом e), если в них заменить независимые переменные ψ на ξ и I на E, а также поменять местами ин-

дексы

Пример. Цепь с LC -элементами. Потокосцепление выражается через $\psi = L(q)\,I$ или $I = L^{-1}(q)\,\psi$, а заряды на конденсаторах - через $\xi = C(q)\,E$ или $E = C^{-1}(q)\,\xi$, где $L(q)$, $C(q)$ - положительно определенные в допустимой области изменения q функциональные матрицы, составленные из собственных $L_{ii}(q)$ и взаимных $L_{ij}(q)$ индуктивностей и емкостей $C_{ii}(q)$, зависящих от механических координат q; $C(q)$ - диагональная матрица $(i, j = 1, \dots, n_e)$. В этом случае запасенная магнитная (электрическая) энергия и коэнергия являются квадратичными формами электрических переменных и соответственно равны между собой

$$W_m = W_m^{co} = 0{,}5\, I^T L(q) I = 0{,}5\, \psi^T L^{-1}(q)\psi,$$

$$W_e = W_e^{co} = 0{,}5\, E^T C(q) E = 0{,}5\, \xi^T C^{-1}(q)\xi.$$

Обобщенные силы электромеханической связи, возникающие при изменении геометрии ЭМС с линейными электромагнитными цепями, должны определяться по запасенным энергиям из выражений

$$Q_{m_i} = 0{,}5\, I^T \frac{\partial L(q)}{\partial q_i} I = -0{,}5\, \psi \frac{\partial L^{-1}(q)}{\partial q_i}\psi;$$

$$Q_{e_i} = 0{,}5\, E^T \frac{\partial C(q)}{\partial q_i} E = -0{,}5\, \xi^T \frac{\partial C^{-1}(q)}{\partial q}\xi.$$

Уравнения Лагранжа-Максвелла для электромеханических систем. Рассмотрим разветвленную электромагнитную цепь, содержащую n_1 катушек индуктивности и n_2 конденсаторов, те и другие в общем случае имеют изменяющуюся конфигурацию, определяемую механическими q и электрическими ξ (или ψ) координатами. Рассмотрим для определенности первую группу аналогий. Пусть число независимых контурных токов равно n_e, $I = [I_1, \dots, I_s, \dots, I_{ne}]^T$, а независимые заряды $\xi = [\xi_1, \dots, \xi_s, \dots, \xi_{ne}]^T$, соответствующие контурным токам, определяются как $\xi_s = \int_0^t I_s\,dt + \text{const}$, $s \in \overline{1, n_e}$. Характеристикой магнитного поля в принятой группе аналогий является магнитная коэнергия, вычисляемая по выражению (I.52а)

$$W_m^{co}(I, q) = \int_0^I \sum_{i=1}^{n_1} \psi_i(I, q)\, d\bar{I}_i, \qquad (I.57)$$

где ψ_i - потокосцепление i -й катушки, а $\bar{I}_i$ - ток в

i -й катушке, который, вообще говоря, не является компонентой вектора $\bar{I}$, а представляет собой алгебраическую сумму нескольких контурных токов, протекающих в ветви с i -й катушки.

Характеристикой электрического поля в принятых переменных $\xi, \bar{I}$ является электрическая энергия, которая вычисляется по выражению

$$W_e(\xi, q) = \int_0^{\xi} \sum_{j=1}^{n_e} E_j(\xi, q)\, d\bar{\xi}_j , \qquad (I.58)$$

где E_j - напряжение на j -м конденсаторе, а $\bar{\xi}_j$ - заряд на j -м конденсаторе, определяемый алгебраической суммой контурных токов ветви с конденсатором (не является компонентой вектора ξ).

Рассмотрим электромагнитный процесс в s -м контуре цепи, обтекаемом независимым током $\bar{I}_s$. Суммарное потокосцепление s -го контура $\psi_s(\bar{I}, q)$ равно алгебраической сумме потокосцеплений катушек индуктивности, содержащихся в контуре. Отметим, что в общем случае $\psi_{ss} \neq \psi_{ii}$ даже, когда $s = i$.

Таким же образом введем для s -го контура суммарное напряжение $E^e_s(\xi, q)$ на конденсаторах, содержащихся в контуре s, причем и здесь $E^e_{ss} \neq E_j$, когда $s = j$.

Рассеяние энергии в цепях учтем суммарным падением напряжения $E^R_s(\bar{I}, q)$ на активных сопротивлениях в s -м контуре.

Если в s -м контуре имеются внешние (управляющие) источники напряжения, то их суммарное напряжение обозначим через $E^u_s(\xi, \bar{I}, q, t)$.

Запишем дифференциальное уравнение для s -го контура по второму закону Кирхгофа:

$$\dot{\psi}_s(\bar{I}, q) + E^c_s(\xi, q) + E^R_s(\bar{I}, q) = E^u_s(\xi, \bar{I}, q, t), \; s \in \overline{1, n_e} . \qquad (I.59)$$

Запишем (I.59) в векторной форме для всех контуров

$$\dot{\psi}(\bar{I}, q) + E^c(\xi, q) + E^R(\bar{I}, q) = E^u(\xi, \bar{I}, q, t) , \qquad (I.60)$$

где ψ, E^c, E^R, E^u - n_e- -мерные векторы контурных величин.

В полученном уравнении (I.60) с учетом (I.57), (I.58)

$$\psi(\bar{I}, q) = \frac{\partial W_m^{co}(\bar{I}, q)}{\partial \bar{I}}, \qquad (I.61)$$

$$E^c(\xi, q) = -\frac{\partial W_e(\xi, q)}{\partial \xi}. \qquad (I.62)$$

Тогда уравнение (I.60) с учетом (I.61), (I.62) переписывается в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial W_m^{co}(\xi, q)}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial W_e(\xi, q)}{\partial \xi} = -E^R(\dot{\xi}, q) + E^u(\xi, \dot{\xi}, q, t). \qquad (I.63)$$

Подобно функции Лагранжа (I.19) введем функцию Максвелла

$$L^e(\xi, \dot{\xi}, q) = W_m^{co}(\xi, q) - W_e(\xi, q), \qquad (I.64)$$

и уравнение (I.63) запишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^e(\xi, \dot{\xi}, q)}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L^e(\xi, \dot{\xi}, q)}{\partial \xi} = -E^R(\dot{\xi}, q) + E^u(\xi, \dot{\xi}, q, t), \qquad (I.65)$$

совпадающего по форме с уравнением Лагранжа (I.20).

Заметим, что в уравнения (I.63), (I.65) может быть явно внесена независимая переменная t (время). При этом получим уравнение нестационарной электромагнитной цепи в той же форме.

Отметим также, что в силу принципа дуальности можно записать дифференциальное уравнение электромагнитной цепи в обобщенных независимых переменных ψ, $\psi = E$, соответствующих второй группе аналогий, формально заменяя в выражениях (I.60)-(I.65) ξ на ψ и $\bar{I} = \dot{\xi}$ на $E = \dot{\psi}$ и поменяв индексы m и e.

Введение функции Максвелла позволяет записать суммарные обобщенные силы электромеханической связи в электромагнитном поле, получаемые наложением действия связей магнитного (I.54а) и электрического (I.55а) полей в виде

$$Q_{em}(\xi, \dot{\xi}, q) = Q_m(\dot{\xi}, q) + Q_e(\xi, q) = \frac{\partial L^e(\xi, \dot{\xi}, q)}{\partial q}. \qquad (I.66)$$

Окончательно, учитывая выражение (I.66) на основе уравнения (I.18) с подстановкой (I.20) и уравнения (I.65) получим систему векторных уравнений Лагранжа-Максвелла для ЭМС (в переменных $q, \dot{q}, \xi, \dot{\xi} = \overline{I}$)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L(q,\dot{q},t)}{\partial q} = Q^{мп}(q,\dot{q},t) + \frac{\partial L^{e}(\xi,\dot{\xi},q)}{\partial q},$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L^{e}(\xi,\dot{\xi},q)}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L^{e}(\xi,\dot{\xi},q)}{\partial \xi} = -E^{R}(\dot{\xi},q) + E^{u}(\xi,\dot{\xi},q,t). \qquad (I.67)$$

Уравнения Лагранжа-Максвелла (I.66), (I.67) являются общей векторно-матричной ЭМС и представляют собой $n_{м}+n_{e}$ - мерную систему дифференциальных уравнений второго порядка, разрешаемых относительно вторых производных по времени обобщенных механических $\ddot{q}$ и электрических $\ddot{\xi}$ координат. Они дают единый способ составления дифференциальных уравнений движения нелинейных и нестационарных электромеханических объектов и электромеханических систем.

Пример. ЭМС с нелинейным преобразованием и упругой связью (рис. I.7).

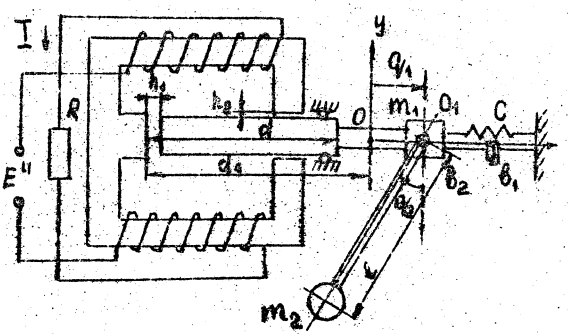

Рис. I.7

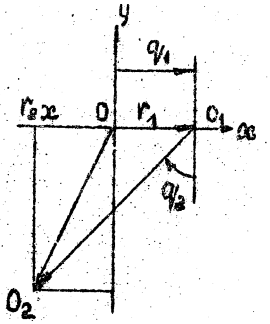

Рис. I.8

ЭМС состоит из маятника длиной l и моментом m_2 и подвеса с массой m_1, приводимым в движение с помощью электромагнитного преобразователя, представляющего собой электромагнитную систему с втягивающимся внутрь плунжером, к которо-

му жестко прикреплен подвес. Подвес соединен возвратной пружиной с жесткостью C и демпфером b_1 с неподвижным основанием. Учтем также вязкое трение в оси маятника O_1 коэффициентом b_2, а потери в электрической цепи учтем активным сопротивлением R.

Поместим правую систему координат $Oxyz$ так, чтобы ось Oz перпендикулярная плоскости рис. I.7, совпадала с осью вращения маятника, а ось Ox направлена вдоль движения подвеса - плунжера, начальное положение которого соответствует недеформированному состоянию пружины. Обмотка сердечника подключена к источнику напряжения $E^{\text{ч}}$.

Составим уравнения Лагранжа-Максвелла. На рис. I.8 показано мгновенное положение подвеса, когда пружина сжата. Считаем также O_1, O_2 центрами масс m_1, m_2. Уравнения связи их радиусов-векторов $r_1 = [x_1, 0, 0]^T$ и $r_2 = [x_2, y_2, 0]^T$ выражают неизменность длины маятника и по теореме косинусов

$$x_2^2 + y_2^2 = x_1^2 + l - 2x_1 l \cos\left(\frac{\pi}{2} + q_{/2}\right), \qquad (а)$$

где $q_{/2}$ - угол отклонения маятника от вертикали (с положительным направлением отсчета против хода часовой стрелки). Из (а) видно, что механическая часть ЭМС является голономной стационарной и имеет две степени свободы, $n_M = 3-1=2$.

В качестве независимых механических координат выберем абсциссу точки подвеса $q_1 = x_1$ и угол q_2: $q = [q_1, q_2]^T$. Выражая $r = [x_1, x_2, y_2]^T$ через обобщенные координаты, получим

$$x_1 = q_1 \;;\; \dot{x}_1 = \dot{q}_1 \;;\; x_2 = q_1 + l\sin q_2 \;;$$
$$\dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l(\cos q_2)\dot{q}_2 \;;\; y_2 = -l\cos q_2 \;;\; \dot{y}_2 = l(\sin q_2)\dot{q}_2 . \qquad (б)$$

Кинетическая энергия МС равна с учетом (б)

$$T(q,\dot{q}) = 0{,}5\dot{r}^T \begin{bmatrix} m_1 & & 0 \\ & m_2 & \\ 0 & & m_3 \end{bmatrix} \dot{r} = 0{,}5(m_1+m_2)\dot{q}_1^2 + 0{,}5 l^2 m_2 \dot{q}_2^2 + l m_2 (\cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 . \qquad (в)$$

Потенциальная энергия силы упругости по (а) равна $\Pi^y(q) = 0{,}5 C q_1^2$, а потенциальная энергия поля силы тяжести равна работе этих сил при перемещении массы m_2 с

уровня, соответствующему мгновенному положению маятника, на уровень $y = 0$

$$\Pi^g(q) = -m_2 g l \cos q_2, \qquad (г)$$

где g - ускорение свободного падения.

Потенциальная функция МС равна

$$\Pi(q) = \Pi^y(q) + \Pi^g(q) = 0{,}5\, c q_1^2 - m_2 g l \cos q_2 . \qquad (д)$$

Отметим, что матрица

$$\frac{\partial^2 \Pi(q)}{\partial q \partial q^T} = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & m_2 l g \cos q_2 \end{bmatrix} . \qquad (е)$$

симметричная, т.е. функция (д) - потенциальная функция.

Вектор потенциальных сил равен по (г) или (е)

$$Q^{\Pi}(q) = -\frac{\partial \Pi(q)}{\partial q} = [-c q_1 - m_2 g l \sin q_2]^T,$$

где первая составляющая представляет собой восстанавливающую силу пружины, действующую в направлении $-q_1$ а вторая - восстанавливающий момент силы тяжести, действующих в направлении $-q_2$.

Непотенциальные силы вязкого трения по (I.I3) равны

$$Q^R(\dot{q}) = [-b_1 \dot{q}_1 , -b_2 \dot{q}_2]^T,$$

а силы электромеханической связи Q_{em} вычислим, рассматривая процессы в электромагнитной цепи.

Электромагнитная цепь имеет один независимый контур с катушкой индуктивности, поэтому n = I. Следуя первой группе аналогий, за обобщенную координату примем заряд ξ, протекающий через катушку, а ток в катушке равен $\dot{\xi} = I$.

Учитывая магнитные сопротивления h_1 и h_2, полагая при этом, что магнитная проницаемость стала много выше, чем воздуха и пренебрегая рассеянием и краевыми эффектами, запишем выражение индуктивности как функции переменной q_1

$$L(q) = \frac{a_0}{b_0 + q_1} ; \quad a_0 = 2\mu_0 S_2 \omega^2, \quad b_0 = d - d_1 + \frac{h_2 S_1}{2 S_2} ,$$

где S_1, S_2 - площади зазоров h_1, h_2 ; ω - число витков; μ_0 - магнитная проницаемость воздуха; d, d_1 -

геометрические размеры.

Представляя функции Максвелла (I.64) через магнитную коэнергию (I.57), получим

$$L^e(\bar{I},q) = W_m^{co}(\bar{I},q) = \int_0^{\bar{I}} L(q)\, I\, dI = 0{,}5\, \frac{a_0}{b_0 + q_1}\, \bar{I}^2 .$$

Активные потери в обмотках учитываются в виде $E^R = -R\bar{I}$. Обобщенную силу электромеханической связи, являющуюся управляющей силой маятника, найдем по (I.66)

$$Q^u = Q_{em}(\bar{I},q) = \frac{\partial}{\partial q}\left(0{,}5\, \frac{a_0}{b_0+q_1}\, \bar{I}^2\right) = \left[-\frac{a_0}{2(b_0+q_1)^2}\bar{I}^2 ,\ 0\right]^T$$

Уравнения Лагранжа-Максвелла для рассматриваемой ЭМС следующие:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial T(q,\dot{q})}{\partial q} = Q^n(q) + Q^R(\dot{q}) + Q_{em}(\bar{I},q); \quad (ж)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L^e(\bar{I},q)}{\partial \bar{I}}\right] - \frac{\partial L^e(\bar{I},q)}{\partial \xi} = -R\bar{I} + E^u . \quad (з)$$

Представим эту систему в явной относительно $\dot{q}, q$ записи. Используя соотношения (I.16) и (в), получим

$$A(q) = \frac{\partial^2 T}{\partial q\, \partial q^T} = \begin{bmatrix} m & m_2 l \cos q_2 \\ m_2 l \cos q_2 & J \end{bmatrix}; \quad (и)$$

$$a(q,\dot{q}) = \left[-m_2 l\, \dot{q}_2^2 \sin q_2 ,\ 0\right]^T,$$

где $m = m_1 + m_2$, $J = m_2 l^2$ - момент инерции маятника относительно оси подвеса.

Записывая (ж) в форме (I.22) и дифференцируя (з), получим нелинейную систему дифференциальных уравнений пятого порядка, описывающую ЭМС в переменных $q_1, q_2, \bar{I}$;

$$\left.\begin{aligned} & m\ddot{q}_1 + m_2 l\, \ddot{q}_2 \cos q_2 - m_2 l\, \dot{q}_2^2 \sin q_2 = \\ & = b_1 \dot{q}_1 - C q_1 + 0{,}5\, a_0 (b_0 + q_1)^{-2} \bar{I}^2 , \\ & J\ddot{q}_2 + m_2 l\, \ddot{q}_1 \cos q_2 = -m_2 g l \sin q_2 - b_2 \dot{q}_2 , \\ & a_0 (b_0 + q_1)\dot{\bar{I}} + \left[-a_0 (b_0+q_1)^{-2}\dot{q}_1 + R\right]\bar{I} = E^u . \end{aligned}\right\} \quad (к)$$

Приведем систему (к) к нормальной форме относительно вектора $x = [q^T, \dot{q}^T, I]^T$. Для этого представим уравнения механической части ЭМС с учетом (и) в виде

$$\ddot{q} = -A^{-1}(q)\,C_m(q)\,q - A^{-1}(q)\,B_m(q,\dot{q})\,\dot{q} + A^{-1}(q)\,Q_{em}(I,q),$$

а уравнение тока перепишем

$$\dot{I} = a^*(q,\dot{q})\,I + b^*(q)\,E^u.$$

Здесь $A^{-1}\,Q_{em} = b_m(q,I)\,I$ линейно относительно тока I. Последние уравнения примут вид:

$$\ddot{q} = -A^{-1}\,C_m\,q - A^{-1}\,B_m\,\dot{q} + b_m\,I,$$

$$\dot{I} = a^*\,I + b^*\,E^u,$$

где

$$A^{-1}(q) = \frac{1}{J_m - (m_2\ell)^2\cos^2 q_2}\begin{bmatrix} J & -m_2\ell\cos q_2 \\ -m_2\ell\cos q_2 & m \end{bmatrix};$$

$$B_m(q,\dot{q}) = \begin{bmatrix} b_1 & -m_2\ell\,\dot{q}_2\sin q_2 \\ 0 & b_2 \end{bmatrix};\quad C_m(q) = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & m_2\ell g\,q_2^{-1}\sin q_2 \end{bmatrix};$$

$$b_m(q,I) = \frac{1}{J_m - (m_2\ell)^2\cos^2 q_2}\left[-\frac{J a_0 I}{2(b_0+q_1)^2},\ \frac{m_2\ell^2 a_0\cos q}{2(b_0+q_1)^2}\right]^T;$$

$$a^*(q,\dot{q}) = \left[\frac{1}{b_0+q_1},\ -\frac{R(b_0+q_1)}{a_0}\right]^T,\quad b^*(q) = \frac{b_0+q_1}{a_0}.$$

Вводя обозначения $x_1 = q_1$, $x_2 = q_2$, $x_3 = \dot{q}_1$, $x_4 = \dot{q}_2$, $x_5 = I$, $u = E^u$ и выполняя необходимые преобразования, получим уравнения ЭМС в нормальной форме:

$$\dot{x} = F(x)\,x + G(x)\,u,$$

где

$$F(x)=\Delta^{-1}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{c}{m_2} & g x_2^{-1}\cos x_2 \times \sin x_2 & \frac{b_1}{m_1} & \frac{1}{m_2 \ell}(\gamma x_4 \sin x_2 + b_2 \cos x_2) & \frac{a_0 x_5}{2(b_0+x_1)^2} \\ \frac{c\cos x_2}{m_2 \ell} & -\gamma_2 g x_2^{-1} \ell^{-1} \times \sin x_2 & \frac{b_1 \cos x_2}{m_2 \ell} & -x_4 \sin x_2 \cos x_2 + \gamma_2 \gamma^{-1} b_2 & \frac{a_0 x_5 \cos x_2}{2(b_0+x_1)^2 m_2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta x_3 (b_0+x_1)^{-1} - \Delta R (b_0+x_1) a_0^{-1} \end{bmatrix},$$

$$G(x) = [\,0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad (b_0+x_1)\,a_0^{-1}\,]^T,$$

$$\Delta = (\gamma_2 - \cos^2 x_2), \quad \gamma_2 = m/m_2$$

2. УПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ МАШИНАМИ В КАЧЕСТВЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

В этой главе рассматривается построение управляемых электромеханических систем с электрическими машинами, нашедших широкое применение в практической деятельности и промышленности. Предварительно даются необходимые сведения о характеристиках электрических машин и их моделей на основе уравнений обобщенной электрической машины. Из всего многообразия электрических машин выбраны как наиболее простой и широко применяемый двигатель постоянного тока.

2.1. Основные характеристики электрических машин

Электрическая машина характеризуется зависимостями, связывающими электрические и механические переменные. Принято рассматривать следующие характеристики:

а) электромеханические характеристики либо $\omega = \psi(\bar{i}_{эм})$, $\omega = \dot{q}$, где q - обобщенная механическая переменная электрической машины (угловое положение вала машины); $\bar{i}_{эм}$ - вектор токов электромагнитных цепей машины (обмоток статора и ротора); ψ, f - вектор-функции, достаточно гладкие по своим аргументам;

б) механические характеристики $M = f(\omega)$ либо $\omega = \psi(M)$, где M - электромагнитный момент.

Рассматривают статические и динамические электромеханические и механические характеристики. Статические характеристики определяются из установившегося состояния электрической машины, описываемого алгебраическими уравнениями. Динамические характеристики описывают переходные процессы в электрической машине и находятся из решений соответствующих дифференциальных уравнений.

Совокупность механических и электромеханических характеристик определяет свойства электромеханической связи в ЭМС.

2.2. Двухфазная обобщенная электрическая машина постоянного тока

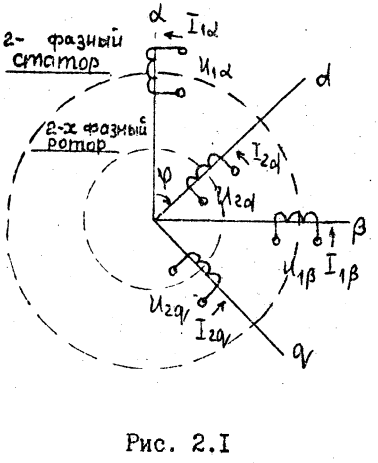

Рис. 2.I

На рис. 2.I показана схема обобщенной двухфазной электрической машины постоянного тока. Оси α, β скреплены со статором и обычно неподвижны, оси d, q скреплены с подвижным ротором, d – продольная, q – поперечная ось, φ – угол поворота.

Обычно принимаются следующие допущения [5] : магнитная цепь электрической машины ненасыщена; рассматриваются первые гармоники несинусоидальной ЭДС обмоток; ротор может быть в явнополюсном и неявнополюсном исполнении, при этом явнополюсность учитывается первой гармоникой МДС в зазоре; имеется полная симметрия электрической машины относительно взаиминдукции статора и ротора, т.е. эти взаимоиндукции одинаковы.

Введем следующие обозначения индексов: $i, j = 1\alpha, 1\beta, 2d, 2q$. Тогда ψ_i обозначает потокосцепление обмотки, например, $\psi_{1\alpha}$ – потокосцепление обмотки 1α, $\psi_{1\beta}$ – потокосцепление обмотки 1β и т.д.

Для каждой обмотки (статора или ротора) можно записать уравнение Кирхгофа

$$U_i = R_i I_i + \frac{d\psi_i}{dt}, \qquad (2.I)$$

где U_i – напряжение внешнего источника; R_i – активное сопротивление обмотки; I_i – ток в i – й цепи.

Электромагнитный момент, создаваемый на валу ротора обобщенной машины является частной производной по $\varphi_{эл}$ от запасенной в электромагнитных цепях магнитной энергии (коэнергии) $\sum_{i=1\alpha}^{i=2q} I_i \psi_i$, т.е.

$$M = 0{,}5 \frac{\partial}{\partial q} \sum_{i=1}^{i=2q} I_i \psi_i \,, \qquad (2.2)$$

где $q_{эл} = p_n q$, p_n - число пар полюсов ротора;
$\varphi = q$ - угол поворота ротора.

Одновременно уравнение (2.2) выражает электромеханическую связь электромагнитных цепей МС.

Потокосцепление i -й обмотки равно

$$\psi_i = \sum_{i=1}^{i=2q} L_{ij} I_j \,, \qquad (2.3)$$

где L_{ij} - собственные $(i=j)$ и взаимные $(i \neq j)$ значения индуктивностей обмоток. Здесь индекс i соответствует обмотке, токи которой наводятся ЭДС взаимоиндукции в обмотку j и наоборот.

Очевидно, что если в (2.3) $\psi_{ij} = const$, то $M = 0$. Поэтому в общем случае L_{ij} - функция $q_{эл}$ и t , т.е.

$$L_{ij} = L_{ij}(q_{эл}, t) \,. \qquad (2.4)$$

В частности, при вращении ротора потокосцепление изменяется и

$$M = 0{,}5 \sum_{i=1}^{2q} I_i \sum_{j=1}^{2q} \frac{\partial L_{ij}}{\partial q_{эл}} I_j \,. \qquad (2.5)$$

Подстановка в уравнение (2.I) потокосцепления (2.3) дает

$$U_i = R_i I_i + \sum_{j=1}^{j=2q} L_{ij} \frac{dI}{dt} I_j + e_i \,, \qquad (2.6)$$

где по (2.5)

$$e_i = \sum_{j=1}^{j=2q} q_{эл} I_j \frac{\partial L_{ij}}{\partial q_{эл}} \,. \qquad (2.7)$$

Результирующая ЭДС, наведенная в обмотке в результате вращения, - так называемая противоЭДС.

Соотношения (2.2), (2.4), (2.6) представляют собой уравнения обобщенной двухфазной двухполюсной электрической машины, связывающие электромагнитные процессы с механическими. Конкретизируя их, в частности (2.4), для различных электрических машин, можно получить различные уравнения электромеханических связей.

2.3. Электрическая машина постоянного тока с независимым возбуждением

Эта электрическая машина (ЭМ) является наиболее распространенной в настоящее время при использовании ее в нелинейном механизме различных электромеханических систем, например, для промышленных роботов, станков с числовым программным управлением, электроприборов антенных установок, испытательных стендов механических узлов и т.д.

Особенностью этой ЭМ является наличие коллектора, механически коммутирующего токи роторных обмоток с частотой коммутации $\dot{q}_{эл}$ (рис. 2.2).

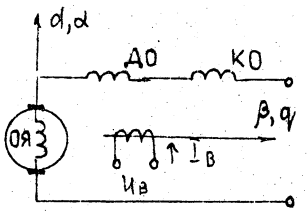

Рис. 2.2

Здесь ДО - дополнительная обмотка, расположенная на статоре, для улучшения процессов коммутации; КО - компенсационная обмотка для компенсации потокосцепления, создаваемого от ДО. При записи уравнений их учитывать не будем. ОЯ - обмотка якоря.

Как частный случай обобщенной машины имеем:

$$U_{1\alpha}=0,\ U_{1\beta}=U_в,\ U_{1q}=0,\ U_{2d}=U_я,\ I_{1\beta}=I_в,\ I_{2d}=I_я,$$
$$L_{1\beta}=L_\beta,\ L_{2d2d}=L_я,\ L_{1\alpha}L_{1\alpha}=L_{2q2q}=0,\ L_{1\beta2d}=L_{2d1\beta}=L_{вз}.$$

Последнее равенство записано в силу симметрии. Тогда с учетом (2.1), (2.3), (2.6), (2.7) получаем

$$\left.\begin{aligned} U_в &= I_в R_в + L_в \frac{dI_в}{dt}, \\ U_я &= I_я R_я + L_я \frac{dI_я}{dt} + \dot{q}_{эл} L_{вз} I_в, \\ M &= p_н L_{вз} I_{вз} I_я, \end{aligned}\right\} \qquad (2.8)$$

где $L_{вз}$ - взаимоиндуктивность обмотки якоря и возбуждения. Здесь

$$\dot{q}_{эл} L_{вз} I_в = p_н L_{вз} \dot{q}_q = K\Phi\omega = e \qquad (2.9)$$

и аналогично

$$K\Phi\omega = M,$$

где конструктивная постоянная $K = p_н N/2\pi a$, N - число активных проводников якоря, a - число параллельных ветвей обмотки якоря; $\dot{q}_q = \omega$ - угловая частота вращения.

В частности, из (2.9)

$$\Phi = \frac{p_n L_{вз}}{K} I_в = K_\Phi I_в, \quad K_\Phi = \frac{p_n L_{вз}}{K}. \qquad (2.10)$$

В нормальной форме уравнения (2.8) с учетом (2.9) и (2.10) имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \dot{I}_я &= -\frac{R_я}{L_я} I_я - \frac{K\Phi\omega}{L_я} + \frac{1}{L_я} U_я, \\ \dot{I}_в &= -\frac{R_в}{L_в} I_в + \frac{1}{L_в} U_в, \\ M &= K\Phi I_я, \quad \Phi = K_\Phi I_в. \end{aligned}\right\} \qquad (2.11)$$

По уравнениям (2.11) легко составляется детализированная структурная схема рассматриваемой ЭМ, изображенная на рис.2.3

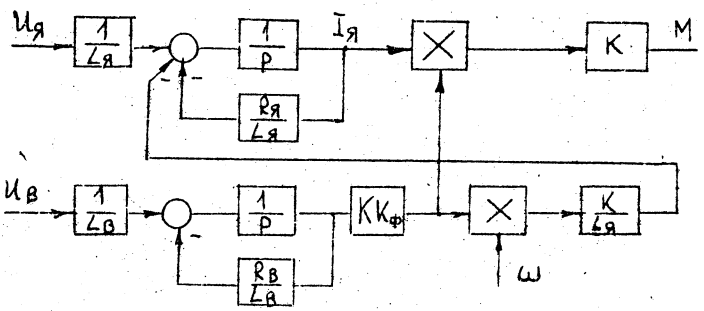

Рис. 2.3

2.4. Электромеханические и механические динамические и статические характеристики электрической машины постоянного тока с независимым возбуждением

Электромеханическими и механическими характеристиками называются соответственно зависимости $I_я(\omega)$, $\omega(I_я)$ и $M(\omega), \omega(M)$. Для их получения второе уравнение из (2.8) запишем для динамических электромеханических характеристик как

$$\left.\begin{aligned} I_я &= \frac{1}{R_я} U_я - \frac{K K_ф \bar{I}_в}{R_я}\omega - \frac{L_я}{R_я}\dot{I}_я, \\ \omega &= \frac{U_я}{K K_ф \bar{I}_в} - \frac{R_я}{K K_ф \bar{I}_в} I_я - \frac{L_я}{K K_ф \bar{I}_в}\dot{I}_я, \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

для динамических механических характеристик –

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{K K_ф \bar{I}_я}{R_я} U_я - \frac{(K K_ф \bar{I}_в)^2}{R_я}\omega - \frac{L_я}{R_я}\dot{M}, \\ \omega &= \frac{U_я}{K K_ф \bar{I}_в} - \frac{R_я}{(K K_ф \bar{I}_в)^2} M - \frac{L_я}{K K_ф \bar{I}_в}\dot{M}. \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Приравняв производные к нулю в (2.12), (2.13), легко получить статические электромеханические и механические характеристики

$$\left.\begin{aligned} \bar{I}_я &= \frac{1}{R_я} U_я - \frac{K K_ф \bar{I}_в}{R_я}\omega, \\ \omega &= \frac{U_я}{K K_ф \bar{I}_в} - \frac{R_я}{K K_ф \bar{I}_в}\bar{I}_я, \end{aligned}\right\} \quad (2.14)$$

$$\left.\begin{aligned} M &= \frac{K K_ф \bar{I}_в}{R_я} U_я - \frac{(K K_ф \bar{I}_в)^2}{R_я}\omega, \\ \omega &= \frac{U_я}{K K_ф \bar{I}_в} - \frac{R_я}{(K K_ф \bar{I}_в)^2} M. \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

Для рассматриваемой ЭМ $\Phi = const$ и соответствующие статические характеристики имеют следующую графическую интерпретацию (рис. 2.4)

Рис. 2.4

Здесь значение ω_0 соответствует скорости холостого хода ($I_я$, $M=0$) и равно из (2.14),(2.15)

$$\omega_0 = U_я / K\Phi .$$

Режимы работы ЭМ постоянного тока (при $\Phi = const$).

А. Двигательный режим, при котором $0 < \omega < \omega_0$ и $e < U_я$. Статическое уравнение двигателя имеет вид: $U_я = I_я R_я + e$. Умножая последнее на $I_я$ получаем

$$P_э = P_т + P_м ,$$

где $P_э = I_я U_я$ - потребляемая мощность; $P_т = R_я I_я^2$ - мощность потерь; $P_м = I_я e = I_я K K_\Phi I_в \omega = M\omega$ - "механическая" мощность.

При $\omega = 0$ имеет место ток короткого замыкания $I_{кз} = U_я / R_я$, который опасен особенно для мощных ЭМ.

Б. Генераторный режим или режим регунеративного торможения, при котором $\omega > \omega_0$ и $e > U_я$. Статическое уравнение баланса напряжений имеет вид $e = U_я + I_я R_я$ и соответствует при умножении его на $I_я$ уравнению баланса мощностей

$$P_м = P_э + P_т .$$

В. Режим противовключения, при котором $\omega < 0$, т.е. якорь двигателя принудительно вращается в противоположную сторону. Уравнение баланса напряжений в этом случае $U_я + e = I_я R_я$ и уравнение баланса мощностей

$$P_э + P_м = P_т .$$

Г. Режим динамического торможения, когда якорная цепь коротко замкнута. В этом случае $I_я R_{я\Sigma} + e = 0$, где $R_{я\Sigma}$ - суммарное сопротивление якорной цепи, и

$$P_м + P_т = 0 .$$

2.5. Способы регулирования статических механических характеристик электрической машины постоянного тока с независимым возбуждением

Основное соотношение

$$\omega = \frac{U_я}{K\Phi} - \frac{R_я}{K\Phi} I_я \qquad (2.16)$$

А. Регулирование частоты вращения изменением сопротивления якорной цепи (постоянный пуск). Принцип регулирования иллюстрируется на рис. 2.5.

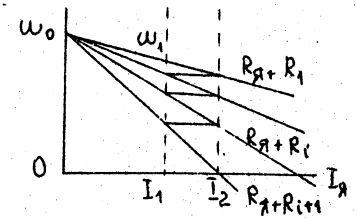

Рис. 2.5

Последовательным исключением секций дополнительных сопротивлений в якорной цепи двигатель разгоняется до скорости ω_1 при контроле релейной или другой системой токов I_1 и I_2. При этом $U_я = U_{ном}$, $\Phi = \Phi_{ном} = const$ и $I_2 \in (2 \div 4) I_{ном}$.

Б. Регулирование частоты вращения изменением напряжения якорной цепи. Здесь $R_я = const$ и $\Phi = \Phi_{ном}$, $0 \leq U_я \leq U_{ном}$. В результате вариации $U_я$ получаем ряд зависимостей $\omega(I_я, U_{яi})$ или $\omega(M, U_{яi})$ (рис. 2.6).

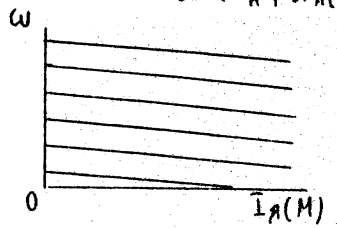

Рис. 2.6

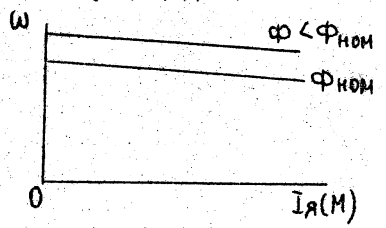

Рис. 2.7

В. Регулирование частоты вращения изменением (ослаблением) потока возбуждения. Из соотношения (2.16) видно, что при постоянстве $U_я$, $R_я$ частоту вращения можно изменять (увеличивать) ослаблением потока. Обычно магнитные системы возбуждения ЭМ близки к насыщению и изменение потока Φ в сторону увеличения практически не применяется. Поэтому прибегают к ослаблению в 3-5 раз потока, которое дает регулирование частоты вращения выше основной частоты ω_0 (рис. 2.7). Основным недостатком следует считать разное ухудшение условия коммутации со значительным сокращением границы области. Максимально допустимых токов якоря, а также эквивалентное изменение параметров ЭМ.

2.6. Задача управления динамикой электромеханических характеристик электрической машины

Ограничимся рассмотрением ЭМ постоянного тока с независимым возбуждением. Для этого дополним дифференциальные уравнения (2.II) дифференциальными уравнениями МС. Возможно, что присоединенная МС будет упругой. Пусть в простом варианте – это двухмассовая (с сосредоточенными параметрами) упругая МС, состоящая из двух дисков с моментами инерции J_1 и J_2 и с произвольной связью с жесткостью C. Кроме того, введем b и d_1, d_2 – коэффициенты внутреннего и внешнего вязкого трения. Пусть момент двигателя $M = M_д$ приложен к оси первого диска, т.е. оси двигателя и первого диска связаны, а момент нагрузки $M_н$, противоположный по знаку относительно момента $M_д$, приложен к оси второго диска.

По правилам составления уравнений упругой МС и с учетом уравнений (2.II) запишем

$$\left.\begin{aligned}
&T_я \dot{I}_я + I_я = \frac{1}{R_я}\left(U_я - KK_Ф I_в \omega\right),\\
&T_в \dot{I}_в + I_в = \frac{1}{R_в} U_в,\\
&J_1 \ddot{q}_1 + (b + d_1)\dot{q}_1 - b\dot{q}_2 + Cq_1 - Cq_2 = M_д,\\
&J_2 \ddot{q}_2 + (b + d_2)\dot{q}_2 - b\dot{q}_1 + Cq_2 - Cq_1 = -M_н,
\end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

где q_1 – угловое положение ротора ЭМ; q_2 – угловое положение оси второго диска; q_1, q_2 – обобщенные координаты упругой МС; $T_я = L_я/R_я$ – постоянная времени якорной цепи; $T_в = L_в/R_в$ – постоянная времени цепи возбуждения; $J_{1\Sigma} = J_1 + J_2$.

Обычно делают $U_в = \text{const}$ ограничиваясь регулированием ЭМС через изменение подводимого напряжения якоря $U_я$.

Вектор состояния x такой ЭМС обычно составляют из компонент $\omega_1, q_1, \omega_2, q_2$ или $\omega_1, q_1, M_у, \omega_2$, где $M_у = C(q_1 - q_2)$.

Если коэффициент жесткости упругой связи $C \to \infty$, то уравнения ЭМС (2.I7) будут иметь вид

$$\left.\begin{aligned} T_я \dot{I}_я + I_я &= \frac{1}{R_я}\left(U_я - K K_\Phi I_в \omega\right), \\ T_в \dot{I}_в + I_в &= \frac{1}{R_в} U_в \quad , \\ J_\Sigma \ddot{q} + d_\Sigma \dot{q} &= M - M_н \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (2.18)$$

где $J_\Sigma = J_1 + J_2$, $d_\Sigma = d_1 + d_2$, $q = q_{/2}$.

Вектор состояния x может быть составлен из компонент $q, \omega, I_я, I_в$ в (2.18), а вектор управления будет $U = [U_я, U_в]^T$. Если, как и раньше $U_в = const$, то вектор состояния $x = [q, \omega, I_я]^T$ и $U = U_я$.

Задача управления динамикой ЭМС в общем виде формулируется:

1) задание цели управления через равенство (неравенство) относительно выбранной функции качества $Q(x, u, t)$;

2) построение закона управления $U = U(x, t)$ обеспечивающего цель управления.

В частном случае стационарной системы можно ограничиться линейными законами вида $U = Kx$, где K - матрица коэффициентов обратной связи. К ним относятся [3,6,7,9] модальное, оптимальное управления (минимизация интегрального квадратичного критерия), а также другие специфические задачи.

2.7. Принцип подчиненного регулирования

Принцип подчиненного регулирования является инженерной базой в построении законов управления, реализуемых пропорционально-интегральными (ПИ-), пропорционально-интегрально-дифференциальными (ПИД-) и пропорциональными (П-) регуляторами, чрезвычайно распространенными в промышленных системах. Принцип представляет собой частный случай модального управления, но с учетом специфических особенностей: управляемый объект представим произведением апериодических и интегрирующих звеньев вида $\frac{K}{Tp+1}$, $\frac{K}{Tp}$ (K, T - параметры); по выходной переменной каждого звена организован контур с ПИ-, ПИД- или П-регулятором, причем образуется система

вложенных подчиненных друг другу по быстродействию контуров, таких, что каждый внутренний контур обладает максимальным, исходя из устойчивости и помехозащищенности, быстродействием.

Цель подчиненного регулирования – сформировать заданную динамику в виде численного распределения полюсов замкнутой системы.

Передаточные функции регуляторов $G_p(p)$:

$G_p(p) = \beta$, $\beta = const\ (>0)$ – (П-регулятор);

$G_p(p) = \beta(\tau p+1)/\tau p$, $\tau = const\ (>0)$ – (ПИ-регулятор);

$G_p(p) = \beta \dfrac{(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)}{\tau_3 p\,(\tau_4 p+1)}$, $\tau_i = const\ (>0)$, $i = \overline{1,4}$,

$\tau_4 \ll \tau_j$, $j = \overline{1,3}$ – (ПИД-регулятор).

Последний регулятор иногда применяется для объектов с передаточной функцией $\dfrac{k}{(\tau_1 p+1)(\tau_2 p+1)}$, $\tau_1, \tau_2 = const\ (>0)$.

Расчетные структурные схемы контуров с инерционными и интегральными звеньями даны на рис. 2.8 и 2.9.

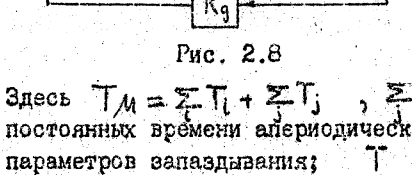

Рис. 2.8

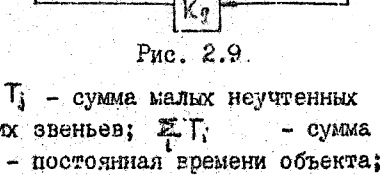

Рис. 2.9

Здесь $T_M = \sum_i T_i + \sum_j T_j$, $\sum_j T_j$ – сумма малых неучтенных постоянных времени апериодических звеньев; $\sum_i T_i$ – сумма параметров запаздывания; T – постоянная времени объекта; k – коэффициент усиления прямой цепи; k_g – коэффициент передачи датчика выходной переменной звена.

Рассмотрим все случаи применения П-, ПИ-регуляторов, обеспечивающих заданный вид передаточной функции в контурах, показанных на рис. 2.8 и 2.9.

а) ПИ-регулятор с апериодическим объектом (структура – рис. 2.8).

Передаточная функция замкнутого контура равна

$$G_3(p) = \frac{\beta k(\tau p+1)}{\beta k k_g(\tau p+1) + \tau p(T_M p+1)(T p+1)}.$$

При выборе

$$\tau = T, \quad \beta = \frac{T}{a T_\mu k k_g}, \quad a \in [1, 4] \qquad (2.19)$$

получаем

$$G_3(p) = \frac{1/k_g}{a T_\mu^2 p^2 + a T_\mu p + 1}. \qquad (2.20)$$

Если в (2.20) положить $a = 2$, то значения корней характеристического полинома $\lambda_{1;2} = -1/2T_\mu \pm j/2T_\mu$ соответствуют баттервортовому распределению корней на левой полуокружности комплексной плоскости с радиусом $\omega_0 = 1/T_\mu$. В технической литературе за выбором τ и β по формулам (2.19) закреплен термин "оптимум по модулю" [6-8] при такой настройке контур имеет равномерную полосу пропускания, равную ω_0.

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАХ) разомкнутого контура с указанными настройками дана на рис. 2.10, а реакция замкнутого контура на ступенчатое управляющее воздействие при различных значениях параметра a – на рис. 2.11.

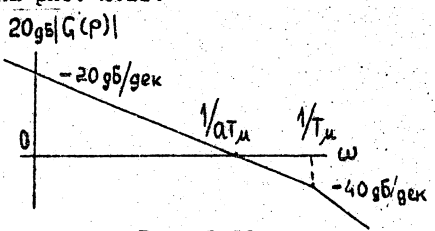

Рис. 2.10

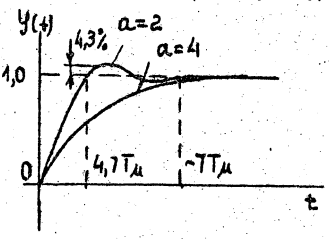

Рис. 2.11

б) П-регулятор с апериодическим объектом (структура – рис. 2.8).

Передаточная функция замкнутого контура равна

$$G_3(p) = \frac{\beta k}{\beta k k_g + (T_\mu p + 1)(Tp + 1)} = \frac{1/k_g}{1 + (Tp+1)(T_\mu p + 1)/\beta k k_g}.$$

Характеристический полином перепишем в виде

$$1+\frac{1}{\beta k k_g}+\frac{T+T_\mu}{\beta k k_g}p+\frac{T T_\mu}{\beta k k_g}p^2 .$$

Полагая $1/\beta k k_g \ll 1$, $T_\mu \ll T$, что как правило, реально хорошо выдерживается, и выбирая a и β, как и раньше, по соотношениям (2.19), получаем $G_3(p)$, совпадающую с выражением (2.20). Однако заметим, что полученный контур - статический.

в) ПИ-регулятор с интегрирующим объектом (структура — рис. 2.9).

Передаточная функция замкнутого контура равна

$$G_3(p)=\frac{\beta(\tau p+1)}{\beta k k_g(\tau p+1)+\tau T^2 p^2(T_\mu p+1)} .$$

При выборе

$$\tau = ab T_\mu \ , \ \beta = T/a T_\mu k k_g \ , \ a,b \in [2,6] \qquad (2.21)$$

получаем

$$G_3(p)=\frac{(ab T_\mu p+1)/k_g}{a^2 b T_\mu^3 p^3+a^2 b T_\mu^2 p^2+ab T_\mu p+1} . \qquad (2.22)$$

Полагая в (2.21) $a = 2$, $b = 2$, получаем так называемый симметричный оптимум [6–8]. ЛАХ разомкнутого контура показан на рис. 2.12, а реакция замкнутого контура на типовое ступенчатое управляющее воздействие - на рис. 2.13.

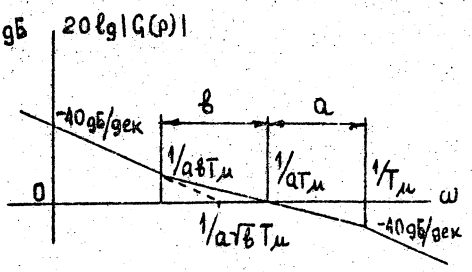

Рис. 2.12

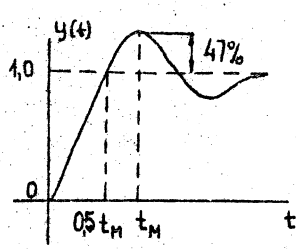

Рис. 2.13

Здесь $M=\frac{ab+1}{ab-1}$ (показатель колебательности);

$$t_n \approx 7{,}25\, a\sqrt{b}\, T_\mu \Big|_{\substack{a=2\\ b=2}} \approx 20\, T_\mu ;$$

$$t_M = (10 \div 12)\, T_\mu .$$

Если, в частности, взять $a = b = 6$, то $\sigma \leq 13\%$.

г) П-регулятор с интегрирующим объектом (структура – рис. 2.9).

Передаточная функция замкнутого контура равна

$$G_3(p) = \frac{1/k_g}{1 + Tp(T_\mu p + 1)/\beta k k_g} .$$

При выборе β, как в (2.19), получаем $G_3(p)$ вида (2.20), причем $a \in [1, 4]$.

Сделаем одно существенное замечание. В иерархии подчиненного регулирования каждый внутренний оптимизированный контур редуцируется до первого порядка (отбрасыванием полинома числителя и слагаемых с оператором p выше первой степени в характеристическом полиноме) и заключается в блок на рис. 2.8, 2.9 с передаточной функцией $1/(T_\mu p + 1)$.

Все рассмотренные случаи сведем в таблицу.

Настройки подчиненного регулирования

Объект	Звено $\frac{k}{Tp+1}$	Звено $\frac{k}{Tp}$
ПИ-регулятор $G(p) = \frac{\beta(\tau p+1)}{\tau p}$	$\beta = \frac{T}{a T_\mu k k_g}$, $\tau = T$, $a \in [1,4]$; $a = 2$ – "оптимум по модулю"	$\beta = \frac{T}{a T_\mu k k_g}$, $\tau = ab T_\mu$, $a, b \in [2,6]$; $a = b = 2$ – "симметричный оптимум"
П-регулятор $G(p) = \beta$	$\beta = \frac{T}{a T_\mu k k_g}$, $a \in [1,4]$	$\beta = \frac{T}{a T_\mu k k_g}$, $a \in [1,4]$

Пример. Следящий электропривод, рис. 2.I4.

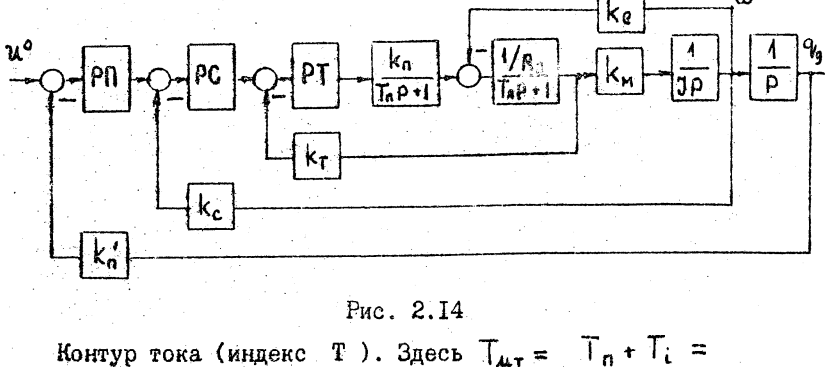

Рис. 2.I4

Контур тока (индекс Т). Здесь $T_{μт} = T_п + T_i =$ $= 0{,}005$ с – суммарная малая постоянная времени; T_i – постоянная времени датчика тока. Влиянием противоЭДС пренебрегаем. Контур тока совпадает с расчетной схемой рис. 2.8 и $T = T_я$, $k_g = k_т$, $k = k_п / R_я$.

Как правило, используется ПИ-регулятор. Исходя из таблицы, $\tau = T_я$, $\beta_т = \dfrac{T_я R_я}{a_т T_{μт} k_п k_т}$ и $G_{зт}(p) = \dfrac{1/k_т}{a_т T_{μт}^2 p^2 + a_т T_{μт} p + 1}$. Для П-регулятора выражение $G_{зт}(p)$ имеет тот же вид, однако применение ПИ-регулятора предпочтительнее, так как в этом случае замкнутый контур обладает астатизмом.

Поскольку контур тока является внутренним относительно контура скорости, представим выражение $G_{зт}(p)$ согласно выше сделанному замечанию первым порядком, т.е.

$$G_{зт}(p) = \frac{1/k_т}{T_{μс} p + 1},$$ где $T_{μс} = a T_{μт}$.

Контур скорости (индекс С) в силу наличия интегрирующего объекта совпадает со структурой рис. 2.9 и $k = k_м / k_т$, $T = J$.

Для ПИ-регулятора, исходя из таблицы, имеем

$$\beta_с = \frac{J k_т}{a_с T_{μс} k_п k_с}, \quad \tau_с = a_с b_с T_{μс} = a_с b_с a_т T_{μт}.$$

Тогда передаточная функция замкнутого контура примет вид (2.22)

$$G_{3c}(p)=\frac{(a_c b_c T_{\mu c} p+1)/k_c}{a_c^2 b_c T_{\mu c}^3 p^3+a_c^2 b_c T_{\mu c}^2 p^2+a_c b_c T_{\mu c} p+1}.$$

Там, где требуется неглубокое регулирование по скорости и минимальный порядок контура скорости (последнее характерно для следящих систем) применяется П-регулятор. Описание контура в этом случае соответствует выражению (2.20).

С учетом оптимизации следующего контура (положения) выражение $G_{3c}(p)$ упростим и приведем к виду

$G_{3c}(p)=\frac{1/k_c}{T_{\mu n} p+1}$, где $T_{\mu n}=a_c b_c T_{\mu c}$. Для ПИ-регулятора или $T_{\mu n}=a_c T_{\mu c}$ для П-регулятора.

Контур положения (индекс П) также совпадает с учетом упрощения контура скорости со структурой рис. 2.9, и $k=1/k_c$, $T=1$, $k_g=k_n'$. Пользуясь таблицей, для ПИ-регулятора выбираем $\tau_n=a_n b_n T_{\mu n}$, $\beta=k_c/a_n T_{\mu n} k_n$; $a_n, b_n \in [2,4]$

и

$$G_{3n}(p)=\frac{(a_n b_n T_{\mu n} p+1)/k_n}{a_n^2 b_n T_{\mu n}^3 p^3+a_n^2 b_n T_{\mu n}^2 p^2+a_n b_n T_{\mu n} p+1}.$$

Для П-регулятора выбор параметра β остается прежним, кроме того, $a_n=a_c=a_T=2$. Передаточная функция замкнутого контура волучается в виде (2.20). Переходный процесс в этом случае на ступенчатое входное воздействие соответствует кривым на рис. 2.II. Отметим, что при $a_n=2$ время первого согласования с ПИ-регулятором скорости

$$4{,}7\,T_{\mu n}=4{,}7\,a_c b_c a_T T_{\mu T}\approx 5\cdot 2\cdot 2\cdot 0{,}005=0{,}2\,c,$$

а с П-регулятором скорости $4{,}7\,T_{\mu n}\approx 5\,a_c a_T T_{\mu T}=0{,}1\,c$.

2.8. Упругая электромеханическая система

Рассмотрим процедуру построения закона управления электромеханическими объектами (линейными и стационарными) на основе линейной обратной связи по состоянию, когда использование принципа подчиненного регулирования затруднено вследствие более сложного представления управляемого объекта, чем инерционные и интегрирующие звенья, например, слабодемпфи-

рованные колебательные звенья, и нередко встречающейся недоступности в измерении некоторых внутренних координат управляемого объекта.

Итак, имеется двухмассовый упругий с двигателем постоянного тока электромеханический объект, питаемый управляемым тиристорным преобразователем, причем по координате тока образован контур тока; он оптимизирован и может в данной задаче принят фильтром первого порядка с передаточной функцией $1/k_T(T_T p+1)$. Влиянием противоЭДС пренебрегаем, возбуждение двигателя независимое и постоянное.

На основе уравнений (2.17) и сделанных предположений запишем исходные уравнения электромеханического объекта

$$\left.\begin{aligned} &T_T \dot{I}_я + I_я = u/k_T, \\ &J_1 \ddot{q}_{v1} + (b + d_1)\dot{q}_{v1} - b\dot{q}_{v2} + c(q_{v1} - q_{v2}) = k_\Phi I_я, \\ &J_2 \ddot{q}_{v2} + (b + d_2)\dot{q}_{v2} - b\dot{q}_{v1} + c(q_{v2} - q_{v1}) = -M_н, \end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

где u – управление типа линейной обратной связи по вектору состояния; T_T – постоянная времени контура тока ($T_T = a_T T_{\mu T}$); k_T – коэффициент "усиления" датчика тока.

Как видно из уравнений (2.23), переменными состояния являются координаты q_{v2}, ее скорость $\dot{q}_{v2}$, упругий момент $M_y = c(q_{v1} - q_{v2})$ скорость $\dot{q}_{v1}$ и ток якоря $I_я$.

Отметим, что размерность вектора состояния (а она равна 5) желательно снизить. С этой целью можно применить динамический компенсатор контура тока с передаточной функцией $\frac{k_T}{k_\Phi}\frac{T_T p+1}{\tau p+1}$, где $\tau \ll T_T$.

Таким образом, закон управления выбираем в виде $u = -K^T x + u^*$, где $k^T = [k_1, k_2, k_3, k_4]^T$ – вектор коэффициентов обратной связи, а $x^T = [x_1, x_2, x_3, x_4] = [q_{v2}, \dot{q}_{v2}, M_y, \dot{q}_{v1}]$.

Отметим также, что переменные M_y, $\dot{q}_{v2}$, как правило, недоступны непосредственному измерению, поэтому дополнительно предусмотрим построение наблюдателя (идентификатора состояния) для получения оценок этих переменных.

Перепишем уравнения (2.23) в нормальной форме относительно введенных выше вектора x, помня, что первое уравнение в (2.23) исключено благодаря компенсатору (динамикой

которого пренебрегаем) и, следовательно, $k_\Phi I_Я = u$

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2, \\
\dot{x}_2 &= -\frac{b+d_2}{J_2}x_2 + \frac{b}{J_2}x_4 + \frac{1}{J_2}x_3 = -M_н, \\
\dot{x}_3 &= C(x_4 - x_2), \\
\dot{x}_4 &= -\frac{b+d_1}{J_1}x_4 + \frac{b}{J_1}x_2 - \frac{1}{J_1}x_3 = u,
\end{aligned}\right\} \quad (2.24)$$

где J_1 – суммарный момент инерции двигателя и первой массы механической части, или в векторно-матричной форме:

$$\dot{x} = Ax + Bu + FM_н,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{b+d_2}{J_2} & \frac{1}{J_2} & \frac{b}{J_2} \\ 0 & -C & 0 & C \\ 0 & \frac{b}{J_1} & -\frac{1}{J_1} & -\frac{b+d_1}{J_1} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При решении задачи устойчивости примем в (2.24) $M_н = 0$.

Определим закон управления, исходя из обеспечения им "оптимальности" характеристического полинома замкнутой системы, например по Баттерворту, т.е. в нашем примере характеристический полином четвертого порядка $\det[\lambda I - (A - BK^T)] = \varphi(\lambda)$ должен совпадать с полиномом

$$\varphi_0(\lambda) = \lambda^4 + 4\omega_0\lambda^3 + 6\omega_0^2\lambda^2 + 4\omega_0^3\lambda + \omega_0^4.$$

Раскрывая определитель и сравнивая коэффициенты полиномов $\varphi_0(\lambda)$ и $\varphi(\lambda)$, получаем соотношения для вычисления коэффициентов обратной связи $k_1, \ldots, k_4$:

$$k_1 = \omega_0^4 J_2 C^{-1}; \quad k_4 = 4\omega_0 - (b+d_1)J_1^{-1} - (b+d_2)J_2^{-1};$$

$$k_3 = C^{-1}\left[6\omega_0^2 - 4\omega_0(b+d_2)J_2^{-1} - C(J_1^{-1} + J_2^{-1}) + (b+d_2/J_2)^2 + b^2/J_1J_2 - k_2 b/J_2\right];$$

$$k_4 = 4\omega_0^3 J_2/C + b(J_1^{-1} + J_2^{-1}) - (b+d_2)J_2/J_1 - 4\omega_0 + b + d_2 + k_3 d_2.$$

Нередко коэффициенты потерь b, d_1 и d_2 оказываются весьма малыми и ими можно пренебречь. Последние выражения в этом случае существенно упрощаются.

Радиус полуокружности ω_0 назначаем из требования к полосе пропускания. Учитывая наличие упруг го резонанса и реальных ограничений координат, практически ограничиваются полосой пропускания не выше значения резонансной частоты. Собственные частоты механической части находятся из характеристического уравнения [3] $\det(\lambda^2 A - C) = \lambda^2[\lambda^2 J_1 J_2 - c\lambda(J_1 + J_2)] = 0$ и равны $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{12} = \sqrt{c(J_1+J_2)/J_1 J_2}$, где A - матрица моментов инерции; C - матрица коэффициентов упругих связей; c - коэффициент жесткой и упругой связи в этом примере.

Таким образом, можем принять $\omega_0 = \lambda_{12}$.

Перейдем теперь к построению наблюдателя, оценивающего переменные M_y и q_{y2}. Для этого выделим подсистему из уравнений (2.24), входом которой является переменная $\dot{q}_{y1}$, а выходом - q_{y2}. Тогда переменные, недоступные измерению, будут внутренними переменными подсистемы, подлежащей идентификации с помощью наблюдателя [3,9]. Идентифицируемая подсистема имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2,$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{b+d_2}{J_2}x_2 + \frac{b}{J_2}x_4 + \frac{1}{J_2}x_3,$$
$$\dot{x}_3 = -c\,x_2 + c\,x_4, \quad x_4 = q_{y1}$$

или в векторно-матричной форме

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r x_4, \quad y_r = C_r x_r,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b+d_2}{J_2} & \frac{1}{J_2} \\ 0 & -c & 0 \end{bmatrix}, B_r = \begin{bmatrix} 0 \\ b/J_2 \\ 0 \end{bmatrix}, x_r = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, C_r^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Для восстановления переменных x_2, x_3 можно применять наблюдатель полного или пониженного порядка [3,9].

Рассмотрим построение наблюдателя полного порядка. Его уравнение имеет вид

$$\dot{\hat{x}}_r = (A_r - GC)\hat{x}_r + GC_r x_r + B_r x_4 . \qquad (2.25)$$

Расчет наблюдателя (2.25) сводится к определению матрицы, обеспечивающей устойчивость матрицы $A_r - GC$ и удалению ее собственных значений на комплексной плоскости в 2-3 раза левее самого "быстрого", т.е. левого, собственного значения матрицы $A - B\bar{K}^T$. Примем в качестве этого значения радиус полуокружности ω_0 распределения полюсов замкнутой системы и выберем полюса наблюдателя в соответствии с условием $Re\,\lambda^н_{1,2,3} \leq -(2 \div 3)\omega_0$; для простоты можно их выбрать вещественными и одинаковыми. Таким образом, зададим характеристический полином наблюдателя в виде $\varphi(\lambda) = (\lambda - \lambda^н)^3 = (\lambda + 2\omega_0)^3 = \lambda^3 + 6\lambda^2\omega_0 + 12\lambda\omega_0^2 + 8\omega_0^3$.

Матрица $A_r - GC$ имеет вид

$$A - GC = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{b+d_2}{J_2} & \frac{1}{J_2} \\ 0 & -C & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -g_{11} & 1 & 0 \\ -g_{21} & -\frac{b+d_2}{J_2} & \frac{1}{J_2} \\ -g_{31} & -C & 0 \end{bmatrix} .$$

Раскрывая и приравнивая к нулю определитель $\det(\lambda\bar{I} - A + GC)$, получаем характеристический полином наблюдателя:

$$\varphi_н(\lambda) = \lambda^3 + \lambda^2\left(\frac{b+d_2}{J_2} + g_{11}\right) + \lambda\left(\frac{g_{11}b + g_{11}d_2}{J_2} + \frac{C}{J_2} + g_{21}\right) +$$

$$+ \frac{g_{11}C}{J_2} + \frac{g_{31}}{J_2} = 0.$$

Отсюда получаем соотношения для элементов матрицы:

$$g_{11} = 6\omega_0 - (b+d_2)/J_2 , \quad g_{21} = 12\omega_0^2 - (b+d_2)(6J_2\omega_0 - b - d_2)/J_2 - C/J_2 , \quad g_{31} = 8J_2\omega_0 - 6C\omega_0 + C(b+d_2)/J_2 .$$

При пренебрежении величинами b, d_2 (если такая возможность имеется) эти соотношения существенно упрощаются. Структурная схема системы показана на рис. 2.15.

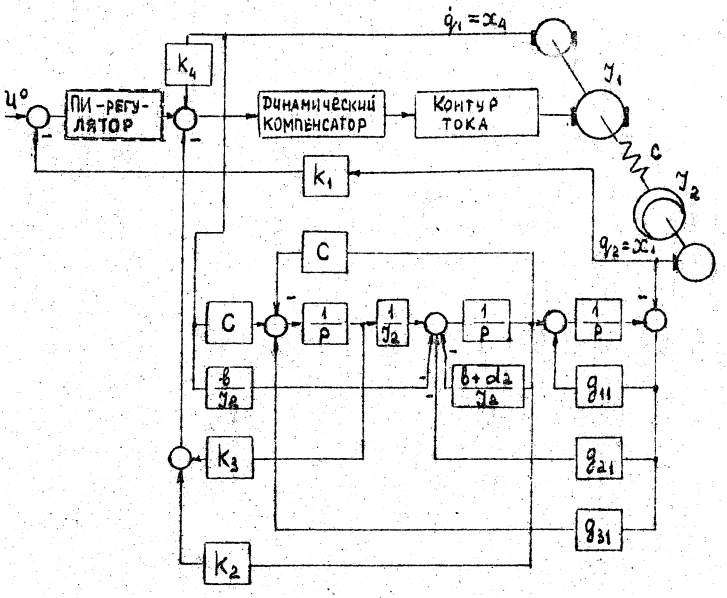

Рис. 2.15

В реальных условиях работы параметры механической системы подвержены изменениям; как правило, меняется момент инерции J_2 второй массы. В такой ситуации достоверность оценок наблюдателя со стационарными параметрами не гарантирована. Поэтому следует переходить к построению адаптивного наблюдателя. Различные структуры адаптивных наблюдателей для электромеханических объектов, а также адаптивные алгоритмы управления ими представлены в работе [3].

В заключение отметим, что действие возмущений $M_н \neq 0$ можно исключить, вводя структуру средства, обеспечивающие астатизм, например, ПИ-регулятор, показанный на структуре пунктиром.

2.9. Бесконтактный моментный двигатель с непрерывной коммутацией *

В данном параграфе кратко рассмотрим бесконтактый моментный двигатель (БМД), не имеющий коллектора и успешно используемый в электромеханических системах самого широкого назначения, в том числе работающих в экстремальных условиях, например, в околоземном пространстве. Электромеханическая система с этим типом двигателя изучается в лабораторном цикле "Электромеханические системы".

БМД с дискретной коммутацией предназначены в основном для работы при вполне определенной скорости или на нескольких ступенях скорости [10]. Для получения плавного изменения скорости в широких пределах целесообразно применение БМД с непрерывной коммутацией токов в обмотках управления (ОУ), осуществляемой с помощью аналогового датчика положения ротора (ДПР). В качестве последнего используются в основном синусно-косинусный вращающийся трансформатор (СКВТ) или его бесконтактный аналог - синусно-косинусный индукционный редуктосин. Последний отличается от СКВТ отсутствием обмоток на роторе и позволяет увеличить передаточное отношение электрической редукции при сравнительно меньших габаритных размерах.

БМД с непрерывной коммутацией состоит из трех основных частей: собственно электродвигателя, ДПР и фазочувствительных усилителей-преобразователей (ФЧУП), число которых определяется фазностью двигателя. Электродвигатель обычно представляет собой синхронную машину с двухфазной (трехфазной, многофазной) ОУ на статоре и постоянным магнитом (ПМ) на роторе. На рис. 2.16 показана упрощенная функциональная схема БМД серии ДМВ. Он имеет следующий состав:

1. Двухфазный синхронный двигатель (СД) типа ДМВ 2,5-2 А. Фазы его якорной обмотки сдвинуты друг относительно друга на 90° эл. и питаются постоянным (точнее, изменяющимся по гармоническому закону в функции электрического угла поворота ротора) током от ФЧУП. На роторе установлены 16 тангенциально расположенных постоянных магнита ($p_э = 8$); на рис. 2.16 показана функциональная схема и векторная диаграм-

*) Параграф написан В.В.Второвым.

ма БМД, причем двигатель для простоты представлен как двухполюсный.

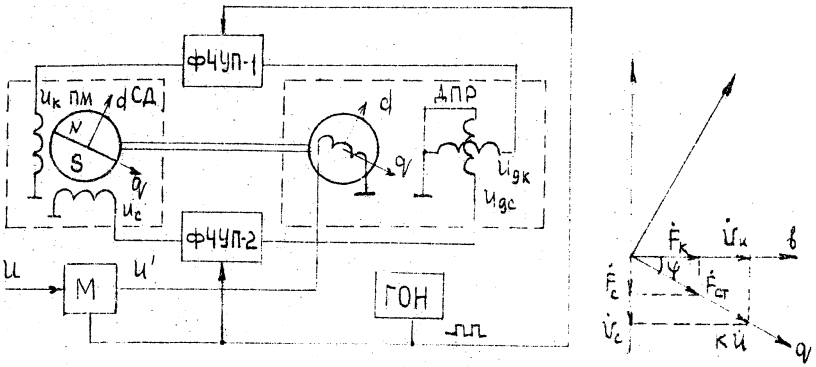

Рис. 2.16

2. ДПР, в качестве которого использован СКВТ типа 2,5 БВТ-Л с однофазной обмоткой на роторе и двухфазной на статоре. СД и ДПР, вообще говоря, должны иметь одинаковое число полюсов, но поскольку в данном случае применен двухполюсный СКВТ, его ротор соединен с ротором СД через зубчатую пару с передаточным отношением $i = p_g = 8$. На роторную обмотку ДПР поступает сигнал переменного тока, являющийся управляющим сигналом для БМД. Этот сигнал с целью получения неограниченного угла поворота двигателя подается на роторную обмотку через кольцевой трансформатор. Ротор ДПР развернут по отношению к ротору СД так, чтобы оси потоков роторной обмотки и ПМ были взаимно перпендикулярны (электрически). Соответствующие этим направлениям оси q и d показаны на рис. 2.16. Как и в СД, статорные обмотки в ДПР электрически взаимно перпендикулярны.

3. Фазочувствительные усилители-преобразователи ФЧУП1 и ФЧУП2 имеют в своем составе фазочувствительный выпрямитель (ФЧВ) и усилитель мощности (УМ). Напряжение переменного тока, снимаемое с синусной (и, соответственно, с косинусной) статорной обмотки ДПР, подается на ФЧВ, который выделяет огибающую, частота которой равна электрической частоте вращения вала СД. Напряжение с ФЧВ, имеющее, например, при равномер-

ном вращении двигателя синусоидальную форму, поступает на вход УМ, питающего соответствующую фазу якорной обмотки СД.

Работа двигателя происходит следующим образом. Управляющий сигнал постоянного тока U проходя через модулятор М (см. рис. 2.16), на второй вход которого с выхода генератора опорного напряжения (ГОН) поступает сигнал несущей частоты Ω = 2 кГц прямоугольной формы, являющийся также опорным сигналом для ФЧВ, преобразуется в сигнал переменного тока $U' = k_M U \sin \Omega t$, поступающий на роторную обмотку ДПР (здесь для простоты в сигнале U' учтена только первая гармоника; k_M - коэффициент передачи модулятора). С синусной и косинусной статорных обмоток ДПР, работающего в амплитудном режиме, снимаются сигналы соответственно $U_{дс} = K_д U' \sin \varphi'$ и $U_{дк} = k_д U' \cos \varphi'$, где $k_д$ - коэффициент передачи ДПР, а φ' - угол поворота ротора ДПР относительно одной из неподвижных осей, например угол между осями a и b на векторной диаграмме (см. рис. 2.16). Угол φ' связан с углом поворота двигателя соотношением $\varphi' = i\varphi = p_д \varphi$, т.е. фактически представляет собой электрический угол поворота двигателя. На синусную и косинусную фазы якорной обмотки СД с выходов ФЧУП подаются соответственно напряжения постоянного тока $U_c = k U \sin \varphi'$ и $U_к = k U \cos \varphi'$ (здесь $k = k_м K_д K_{фчуп}$, где $K_{фчуп}$ - коэффициент передачи ФЧУП). В результате вектор МДС статора $\dot{F}_{ст}$, равный векторной сумме МДС фаз $\dot{F}_c$ и $\dot{F}_к$ пропорциональных напряжениям U_c и $U_к$ займет в пространстве положение, определяемое углом φ, т.е. будет ориентирован вдоль оси a, в то время как вектор МДС ПМ $\dot{F}_р$ будет направлен вдоль оси d (см. рис. 2.16). Взаимодействие МДС ротора и статора создает вращающийся электромагнитный момент, пропорциональный $F_{ст} F_р \sin \theta$, где θ - угол между векторами $\dot{F}_{ст}$ и $\dot{F}_р$ устанавливаемый, как было сказано выше, равным 90^0эл. При вращении ротора СД и вектора $\dot{F}_р$ будет одновременно поворачиваться и ротор ДПР, это будет приводить к изменению угла φ', а значит к повороту вектора $\dot{F}_{ст}$. Таким образом, угол θ при вращении двигателя не меняется, и,

следовательно, электромагнитный момент БМД постоянен и не зависит от угла φ как и в обычном необращенном двигателе постоянного тока.

Сказанное позволяет сделать вывод о том, что благодаря своей конструкции БМД в данной схеме включения по своим характеристикам аналогичен необращенному коллекторному двигателю постоянного тока. В частности, в отличие от синхронного двигателя он обладает начальным пусковым моментом. Далее, хотя частота f тока в фазах статорной обмотки связана с частотой вращения ротора n формально тем же соотношением, что и синхронной машине ($n = 60f/p_9$), эта частота представляет собой уже не частоту питающей сети, а функцию частоты вращения ротора, которая, например, в нерегулируемом приводе определяется, в свою очередь, приложенными к двигателю напряжением и моментом сопротивления.

Моментные двигатели с ПМ обладают рядом преимуществ перед обычными (немоментными с электромагнитным возбуждением) двигателями, что объясняется следующими причинами.

Исключение обмотки возбуждения, а вместе с ней и потерь на возбуждение, рассеиваемых в двигателе, приводит к снижению общего нагрева двигателя, что позволяет увеличить ток и, следовательно, момент в тех же габаритах машины. Применение ПМ позволяет также уменьшить высоту полюсов в 2-3 раза, что приводит к уменьшению диаметра машины на 20-30 %. Одновременно упрощается установка на статоре, а в обращенной машине - на роторе, большого числа полюсов, что обеспечивает высокую равномерность магнитного поля в воздушном зазоре, а следовательно и большую равномерность скорости вращения двигателя. Установка мощных магнитов снижает размагничивающее действие обмотки якоря, что делает возможность получения 10-20-кратных моментов двигателя при малых скоростях вращения, а следовательно, высокого быстродействия привода. Таким образом, МДПМ имеет высокое быстродействие при достаточно большом собственном моменте инерции.

Кроме того, отсутствие коллектора в БМД дополнительно способствует повышению надежности и увеличению срока службы привода.

В имеющейся литературе по БМД [10] вопросы математического описания этих двигателей рассматриваются почти исключительно применительно к задачам расчета параметров и статических характеристик БМД. В то же время математическая модель БМД, пригодная для исследования динамики и разработки систем автоматического управления такими двигателями, практически отсутствует. Получим математическую модель БМД в структурной форме. Основой для ее построения служат известные уравнения БМД [10,11]. При этом делаются соответствующие допущения: магнитная цепь машины считается ненасыщенной; магнитный поток ПМ - постоянным; поле статора - круговым; реакция якоря и остаточный электромагнитный момент не учитываются.

Пренебрегая собственной динамикой модулятора, ДПР и ФЧУП, на основании изложенного выше можем записать следующие выражения для мгновенных значений напряжений, подаваемых на синусную и косинусную фазы обмотки якоря СД:

$$u_c = k u \sin p_g \varphi, \qquad (2.26)$$

$$u_k = k u \cos p_g \varphi, \qquad (2.27)$$

где u - управляющее напряжение постоянного тока; k - произведение коэффициента передачи модулятора, ДПР и ФЧУП; p_g - число пар полюсов СД; φ - геометрический угол поворота СД.

Приводя напряжения u_c и u_k к осям d и q получаем (см. векторную диаграмму на рис. 2.16)

$$u_d = u_k \sin p_g \varphi - u_c \cos p_g \varphi, \qquad (2.28)$$

$$u_q = u_k \cos p_g \varphi + u_c \sin p_g \varphi, \qquad (2.29)$$

или окончательно с учетом (2.26), (2.27)

$$u_d = 0, \qquad (2.30)$$

$$u_q = k u. \qquad (2.31)$$

Впрочем, эти соотношения легко усматриваются из приведенной векторной диаграммы.

Таким образом, хотя напряжения u_d и u_q формально и выражаются, согласно (2.28) и (2.29), через угол поворота

ротора двигателя φ фактически они от φ не зависят.

Связь между токами и напряжениями СД дается уравнениями

$$\begin{bmatrix} L_d p + r & -L_q \omega \\ L_d \omega & L_q p + r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_d \\ i_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_d \\ u_q - E \end{bmatrix}, \qquad (2.32)$$

где

$$E = \psi \omega, \qquad (2.33)$$

$$\omega = p_g \dot{\varphi} \qquad (2.34)$$

– соответственно противоЭДС и электрическая угловая скорость ротора двигателя. Здесь $p \equiv d/dt$; ψ – потокосцепление фазы двигателя от потока ПМ; r, L_d и L_q – активные сопротивление и индуктивность обмотки статора по осям d и q.

Электромагнитный момент определяется выражением

$$M = p_g \psi i_q + p_g (L_d - L_q) i_d i_q, \qquad (2.35)$$

а уравнение механического движения имеет вид

$$M - M_c = J \ddot{\varphi}, \qquad (2.36)$$

где M_c и J – соответственно момент сопротивления и приведенный момент инерции двигателя.

Изобразим уравнения (2.32) в виде структурной схемы (рис. 2.17,а). Обычно для целей исследования эти уравнения решают относительно токов i_d, i_q. Однако при построении математической модели БМД такой путь слишком громоздок. Наиболее простым и экономным в данном случае является использование структурно-топологического метода инверсии [12]. Проинвертировав путь между переменными i_d и i_q, а также путь от i_q и $u_q - E$, мы приходим к схеме, изображенной на рис. 2.17,б. Полная структурная схема БМД, соответствующая уравнениям (2.30)-(2.36), показана на рис. 2.18.

Полученная математическая модель БМД нелинейна и в таком виде отличается от хорошо известной математической модели коллекторного двигателя постоянного тока с независимым возбуждением. В то же время известно [10], что по своим статическим характеристикам оба двигателя практически не отличаются.

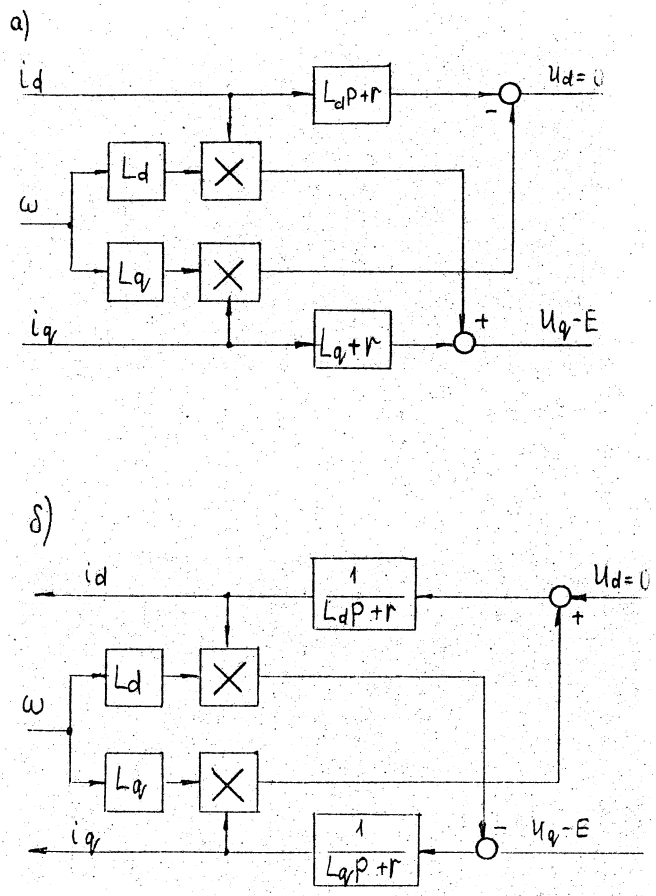
а)
i_d
$L_d p + r$
$u_d = 0$
L_d
ω
L_q
i_q
$L_q + r$
$u_q - E$
б)
i_d
$\frac{1}{L_d p + r}$
$u_d = 0$
L_d
ω
L_q
i_q
$\frac{1}{L_q p + r}$
$u_q - E$

Рис. 2.17

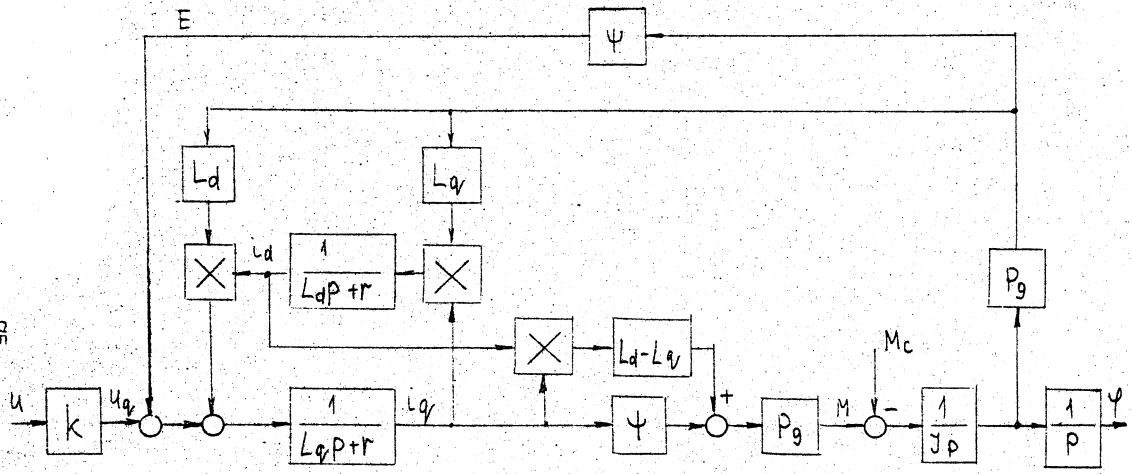

Рис. 2.I8

Проведем анализ данной модели с точки зрения возможности неучета имеющихся нелинейностей, т.е. линеаризации и упрощения математического описания БМД.

Во-первых, заметим, что на структурной схеме (см. рис.2.18) звено с передаточной функцией $1/(L_q p + r)$ охвачено обратной связью, передача которой в предположении, что $\omega = const$, равна $L_d L_q \omega^2/(L_d p + r)$. Передаточная функция такого соединения

$$W(p) = \frac{L_d p + r}{L_d L_q p^2 + (L_d + L_q) p + r^2 + L_d L_q \omega^2},$$

Для маломощных БМД выполняется условие

$$L_d L_q \omega^2 \ll r^2 \qquad (2.37)$$

поэтому $W(p) \approx 1/(L_q p + r)$. Кроме того, известно что в синхронных машинах малой мощности с возбуждением от ПМ с четырьмя и более полюсами с достаточной для практики точностью можно принять

$$L_d = L_q. \qquad (2.38)$$

При выполнении условий (2.37) и (2.38) структурная схема БМД существенно упрощается и линеаризуется. Не трудно убедиться, что в этом случае она полностью совпадает с общеизвестной математической моделью коллекторного двигателя (постоянного тока).

Анализируя, например, выполнение условия (2.37) для двигателя ДМВ 2,5-2 А, отметим, что согласно экспериментальным данным, $T_я = L/r \approx 0{,}001$ с (здесь $L = L_d = L_q$), $\omega_{max} = p_g \dot{\varphi}_{max} \approx 8 \cdot 20 = 160$ с$^{-1}$. Отсюда $(T_я \omega_{max})^2 \approx 0{,}026 \ll 1$, что подтверждает вышесказанное.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

I. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Мерщин Д.Р. Курс теоретической механики, 2-е изд.- М.: Наука, 1979.- 816 с.

2. Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения.- М.: Наука, 1971.- 312 с.

3. Борцов Ю.А., Поляхов Н.Д., Путов В.В. Электромеханические системы с адаптивным и модальным управлением.- Л.: Энергоатомиздат, 1984.- 216 с.

4. Мельников Г.И. Динамика нелинейных механических и электромеханических систем.- Л.: Машиностроение, 1975.- 200 с.

5. Уайт Д., Вудсон Г. Электромеханические преобразователи энергии / Пер с англ; Под ред. С.В.Страхова.- М.-Л.: Энергия,. 1964.- 528 с.

6. Борцов Ю.А., Соколовский Г.Г. Тиристорные системы электропривода с упругими связями.- Л.: Энергия, 1979.- 160 с.

7. Башарин А.В., Новиков В.А., Соколовский Г.Г. Автоматическое управление электроприводами.- Л.: Энергоиздат, 1982.- 380 с.

8. Чиликин М.Г., Ключев В.И., Сандлер А.С. Теория автоматизированного электропривода.- М.: Энергия, 1979.- 616 с.

9. Поляхов Н.Д., Путов В.В. Идентификация и адаптация автоматических систем/ Под ред. Ю.А.Борцова / ЛЭТИ-Л., 1985.- 80 с.

10. Беленький Ю.М., Зеленков Г.С., Микеров А.Г. Опыт разработки и применения бесконтактных моментных приводов/ ЛДНТП.- Л., 1987.- 28 с.

11. Второв В.Б. Применение метода инверсии для построения структурной математической модели бесконтактного моментного двигателя постоянного тока// Изв. ЛЭТИ, 1986, Вып. 369.- С. 79-84.

12. Борцов Ю.А. Математические модели автоматических систем/ ЛЭТИ-Л., 1981.- 80 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

I. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ 3

I.I. Основные понятия. Обобщенные координаты и обобщенные силы 3

I.2. Уравнение Лагранжа второго рода I0

I.3. Механические системы с циклическими координатами I6

I.4. Упругие многомассовые механические системы 2I

I.5. Влияние различных сил на устойчивость системы .. 27

I.6. Уравнения Лагранжа-Максвелла для электромеханических систем 33

2. УПРАВЛЯЕМЫЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С ЭЛЕКТРИЧЕСКИМИ МАШИНАМИ В КАЧЕСТВЕ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ 47

2.I. Основные характеристики электрических машин 47

2.2. Двухфазная обобщенная электрическая машина постоянного тока 48

2.3. Электрическая машина постоянного тока с независимым возбуждением 50

2.4. Электромеханические и механические динамические и статические характеристики электрической машины постоянного тока с независимым возбуждением 5I

2.5. Способы регулирования статических механических характеристик электрической машины постоянного тока с независимым возбуждением 53

2.6. Задача управления динамикой электромеханических характеристик электрической машины 55

2.7. Принцип подчиненного регулирования 56

2.8. Упругая электромеханическая система 62

2.9. Бесконтактный моментный двигатель с непрерывной коммутацией 68

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 77

Св.план, 1989, поз.1306

Борцов Юрий Анатольевич, Полухов Николай Дмитриевич,
Путов Виктор Владимирович

ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ
УПРАВЛЯЮЩИХ КОМПЛЕКСОВ

Редактор А.В.Богданова

Подп. к печ. 30.12.89. М-27318. Формат 60x84 1/16.Бумага тип.№2.
Офсетная печать. Усл.печ.л. 4,65. Усл.кр.-отт. 4,77. Уч.-изд.л.
5,0. Тираж 100 экз. Зак.№ 31. Цена 15 коп.
Редакционно-издательский отдел ЛЭТИ им.В.И.Ульянова (Ленина)

Ротапринт ЛЭТИ
197022, Ленинград, ул. Проф.Попова, 5

15 к.